RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 gennaio 1915.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Eclisse totale di sole, del 21 agosto 1914.* Relazione preliminare del Socio A. Riccò, per la missione italiana in Crimea.

Di grande importanza per gli studii solari era certamente l'eclisse totale di sole del 1914; e gli osservatorii e gli astronomi delle varie nazioni si erano preparati da lunga pezza all'osservazione del fenomeno. Infatti, al Congresso tenutosi a Bonn nel luglio-agosto 1913 dalla *International Union for solar Research*, erano state annunziate circa venti missioni per lo studio dell'eclisse, che si presentava in condizione favorevole per la stagione e facilmente accessibile, specialmente agli europei; poichè la zona percorsa dall'ombra della luna andava dall'estrema America settentrionale, attraversava l'Atlantico, la penisola Scandinava, la Russia da Riga a Teodosia (Crimea), il mar Nero, l'Asia minore, e andava a finire nell'India inglese: la zona dell'ombra, ossia della totalità, era larga circa 180 km. Si aveva dunque in Europa un esteso e comodo spazio per l'osservazione.

L'interesse per lo studio di quest'eclisse era aumentato dal fatto che, in Europa, più non si avrà alcun eclisse totale di sole sino al 1927, ed anche allora sarà visibile soltanto nella parte più settentrionale dell'Europa, ove il clima è poco favorevole; nel 1919 ve ne sarà uno visibile nell'Africa occidentale e nell'America meridionale. Soltanto nel 1961 vi sarà un eclisse totale, visibile in Italia.

Ma l'eclisse totale del 1914 aveva una durata breve, al massimo di 2^m 14^s tra Vilna e Minsk. Per la maggiore probabilità di buon tempo era indicata Teodosia, dove la media dell'annuvolamento in agosto è solamente del 24 %; perciò, quantunque ivi la durata fosse soltanto di 2^m 8^s, pure quivi era la maggiore affluenza degli astronomi. Infatti vi erano due missioni francesi, una inglese, una argentina, quattro russe, una spagnuola ed una italiana.

Missione italiana. — La nostra missione scelse dunque come stazione Teodosia, per la detta probabilità di bel tempo, ed anche perchè essendovi linee di navigazione italiane che vanno dall'Italia ad Odessa, il viaggio poteva farsi per mare dall'Italia a Teodosia, con un solo trasbordo ad Odessa, dalla nave italiana ad una russa: il che era molto importante, non solo dal punto di vista dell'economia, ma ancora dell'integrità dei numerosi, importanti e delicati strumenti che si intendeva di trasportare.

La detta spedizione italiana — che il Ministero della istruzione pubblica, accogliendo benevolmente la proposta dello scrivente, validamente appoggiata dal sen. prof. V. Volterra e dal prof. E. Millosevich, direttore dell'Osservatorio al Collegio Romano, inviava per l'eclisse — originariamente era formata da Riccò, e dal signor Luigi Taffara (già assistente all'Osservatorio di Catania, attualmente incaricato all'Osservatorio al Collegio Romano e compilatore all'Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica) come assistente fotografo. Poi ad essa si associò il prof. L. Palazzo, direttore del R. Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica, il quale, dovendo recarsi a Pietrogrado circa all'epoca dell'eclisse, per la riunione dell'*Associazione internazionale sismologica*, come delegato dell'Italia, aveva opportunamente pensato di approfittare del viaggio in Russia per farvi anche osservazioni e studii circa l'influenza dell'eclisse sui fenomeni meteorici e magnetici della terra, come aveva fatto nel 1905 a Tripoli. Inoltre il prof. G. Mengarini (che aveva già osservato l'eclisse del 1905 in Spagna), pure desiderò di fare parte della missione, a sue spese, assieme alla figlia, signorina Fausta, come assistente, ed alla signorina C. Modigliani, pittrice; col proposito di studiare direttamente, e colla fotografia autocromica, le interessanti colorazioni dell'eclisse. S. E. il contrammiraglio E. Millo, allora Ministro della marina, accogliendo con illuminata benevolenza la domanda di Riccò, aveva concesso che la regia nave « Archimede », stazionaria a Costantinopoli, si recasse a Teodosia per partecipare, col personale di bordo, ai lavori della missione italiana.

Programma. — Così, senza aumento di spesa per lo Stato, la missione italiana era accresciuta, ed il suo programma veniva allargato, comprendendo osservazioni visuali dirette e spettroscopiche della cromosfera e delle protuberanze (Riccò); fotografie spettrali della cromosfera, delle protuberanze, dello strato invertente (Taffara); disegni e fotografie monocromatiche ed a luce completa, della corona (F. Mengarini); fotografie autocromiche del-

l'eclisse totale (G. Mengarini); quadro dell'eclisse a colori (C. Modigliani); osservazioni meteorologiche e magnetiche complete, dirette, e registrate prima, durante e dopo l'eclisse (L. Palazzo).

Strumenti. — Gli strumenti che la missione portava con sè, erano:

un equatoriale *Cooke* di 223 cm. lunghezza focale e 15 cm apertura, munito di spettroscopio *Zeiss*;

un equatoriale Frannhofer di 300 cm. lunghezza focale e 18 cm. apertura (gentilmente prestato dal prof. A. Bemporad, direttore del R. Osservatorio di Capodimonte), cui si era applicata alla estremità oculare una camera *Reflex Mentor*;

una *quadruplice camera*, o *coronagrafo*, con quattro obbiettivi di 200 cm. lunghezza focale e 8 cm. apertura (cortesemente prestata dal professor Mengarini), munita davanti allo *châssis*, per un compartimento, di un filtro di luce rossa presso la riga C, e di un filtro di luce verde presso la riga coronale per un altro compartimento; al terzo compartimento si applicava una lastra sensibile ai raggi più rifrangibili; al quarto una lastra pancromatica. Questo coronagrafo era pure montato parallatticamente, e fornito di motore e regolatore gentilmente prestati dal prof. Millosevich;

una *camera prismatica* di 126 cm. lunghezza focale e 10 $^1/_2$ cm. apertura, con prisma di *flint* pesante, coll'angolo rifrangente di 20°. Questa camera era montata (come per l'eclisse del 1905) sul manicotto dell'asse di declinazione del *Cooke*, mediante apposita sella con cui la camera si poteva dirigere e fissare a declinazioni varie;

un *equatoriale Steinheil* portatile, con lunghezza focale 124 cm., apertura 8 cm., coll'oculare d'ingrandimento 40, cui era stato applicato un congegno col quale si poteva portare davanti all'oculare sia un oscuratore graduato, sia uno spettroscopio oculare *Abbe*, mentre una fessura andava a collocarsi nel fuoco anteriore dell'oculare;

un *cannocchiale terrestre Watson*, di 120 cm. di lunghezza focale, e 8 cm. di apertura, fornito dal prof. Mengarini;

un *cronografo fotografico* costruito dal prof. Mengarini, composto di un apparecchio atto ad impressionare « films » cinematografiche, innanzi al cui obbiettivo erano disposti un cronometro a secondi e due lampadine elettriche. Chiudendo un contatto elettrico, le lampadine davano un lampo brevissimo, la pellicola fotografava la posizione degli indici del cronometro e, cessato il lampo, si spostava, pronta per una nuova impressione. In questo modo, chiudendo un contatto elettrico, ciò che avveniva automaticamente mediante lo scatto dell'otturatore fotografico, si poteva ottenere la esatta riproduzione dei tempi. Disgraziatamente, dopo la prima registrazione, l'orologio che spostava la pellicola si incantò e fu dovuto rimettere in moto bruscamente, sicchè le successive registrazioni non riuscirono sicure.

una serie completa di *strumenti meteorologici* per le osservazioni e le registrazioni della pressione, della temperatura dell'aria e del suolo, e dell'umidità; il pireliometro di Angström per la radiazione solare; l'elettrometro di Wulf per lo studio della radiazione penetrante; i variometri con l'apparecchio a registrazione fotografica per la declinazione, la forza verticale e la forza orizzontale magnetica; il magnetometro e l'inclinometro per l'osservazione diretta degli elementi magnetici.

Inoltre, parecchie camere fotografiche e strumenti accessorii.

Viaggio. — Questi strumenti in 26 casse, del peso complessivo di circa tre tonnellate, furono riuniti tutti in Catania, donde con esse partirono, il 28 luglio, Riccò, Palazzo e Taffara sul piroscafo *Porto di Smirne* della Società marittima italiana; il quale, toccando Siracusa, la Canea, il Pireo, Chio, Smirne, Costantinopoli, li portava ad Odessa, ove giungeva il 7 agosto; e là, il giorno 8 si imbarcavano sul piroscafo russo *Lazarew*, col quale arrivavano il giorno 10 a Teodosia.

Il prof. Mengarini con le sue compagne si era imbarcato a Brindisi, ed aveva raggiunto la missione a Costantinopoli, viaggiando con la linea diretta.

Stazione a Teodosia. — Per il cortese interessamento del viceconsole d'Italia in Teodosia, signor F. Durante, e del signor T. Rinesi, addetto al Consolato medesimo, la missione ebbe presso Teodosia, circa a due km. ad ovest della città, una villetta per alloggiare, l'attiguo giardino per impiantarvi gli strumenti astronomici e meteorologici, una stanza per la fotografia, una stanza per gli strumenti magnetici registratori.

Preparativi. — Veramente, negli undici giorni che precedettero l'eclisse la stagione non si mostrò propizia: all'arrivo vi fu una pioggia torrenziale, ed un'altra al giorno 17 agosto, e frequentemente si ebbero nubi e venti forti; ma si ebbero anche frequenti periodi di cielo purissimo e di straordinaria trasparenza, cosicchè si potè presto costruire una grande baracca in legno e tela, ed i pilastri in muratura per gli strumenti principali e montare questi; ed il 13 Riccò potè cominciare con l'equatoriale *Cooke* le osservazioni spettroscopiche quotidiane delle protuberanze solari, mentre si continuava la collocazione e la rettifica degli altri apparati, con osservazioni astronomiche e fotografiche.

Col 16 agosto il prof. Palazzo aveva terminato di mettere in ordine il magnetografo, il quale cominciò a registrare regolarmente dal giorno suddetto, sino a tutto il 28 agosto.

Alla vigilia dell'eclisse, tutti gli strumenti erano pronti e si potè fare la prova generale *in bianco* di tutte le operazioni da eseguire per l'eclisse. Il sig. T. Rinesi assunse di contare i secondi a voce alta, seguendo le battute di un metronomo.

Al mattino del 21 il cielo era sereno: Riccò osservò le protuberanze, che erano bellissime, ma poche.

Si fecero gli ultimi preparativi con grandi speranze. Però verso mezzodì cominciarono a comparire nubi che si fecero sempre più dense ed oscure. La missione era pronta, ma in grande angoscia. Si decise di svolgere egualmente il nostro programma, anche malgrado le nubi. Fortunatamente, pochi minuti prima della totalità, cioè a circa $3^h\ 19^m$ di tempo locale, $0^h\ 58^m$ di tempo medio di Greenwich, nelle nubi oscure si formò uno squarcio di cielo puro, e le osservazioni poterono compiersi secondo il programma; pochi secondi dopo la fine della totalità tornarono le nubi.

Dopo l'eclisse. — Nei giorni seguenti, aspettando il piroscafo italiano che da Odessa avrebbe ricondotto in Italia la missione, il signor Taffara sviluppò accuratamente le fotografie, si smontarono e si imballarono gli strumenti che più non servivano, e si continuarono ancora per alcuni giorni le osservazioni spettroscopiche delle protuberanze e le osservazioni meteorologiche, attinometriche e magnetiche; si visitò la città, i suoi istituti e monumenti, di cui parecchi della dominazione genovese. Verso la mezzanotte del 30 la missione s'imbarcò sul piroscafo russo « principessa Eugenia Oldemburg », che il primo settembre al mattino arrivò ad Odessa; ed alla sera la missione ripartì col piroscafo « Favignana » della marittima italiana che con lo stesso itinerario, come per l'andata, ma con alcune peripezie, la riportò in Italia.

Il còmpito della missione è stato facilitato e reso gradevole dai molti aiuti, informazioni, cortesie, che ha ricevute: dal R. Console generale d'Italia ad Odessa cav. uff. G. Rosset e dal viceconsole cav. S. G. Cozzio, dal Console di Teodosia sig. F. Durante e dall'addetto al consolato sig. T. Rinesi, dal Direttore dell'Osservatorio meteorologico centrale per la Crimea prof. Sarandinaki, dal principe Léon Galitzine, dalla « Compagnie de navigation à vapeur et de commerce » di Odessa, dalla Società marittima italiana, dalla Società di servizii marittimi. A tutti la missione professa viva riconoscenza.

Le condizioni politiche non hanno permesso alla regia nave « Archimede » di recarsi a Teodosia, ed al personale di bordo di prendere parte ai lavori della missione: ma questa è pur sempre grata a S. E. Millo della buona intenzione di aiutarla.

Risultati. — Le osservazioni spettroscopiche fatte a Teodosia da Riccò dal 13 al 23 agosto (eccettuato il 17, per cattivo tempo) dimostrarono che il fenomeno delle protuberanze solari era in decrescimento di numero e di grandezza, talchè al 23 non ve n'era più che una piccolissima; al mattine dell'eclisse, cioè del 21, ve ne erano soltanto tre, di cui una alta 69″, cioè $^7/_{100}$ del raggio solare, ma assai debole, una mediocre ed un'altra piccolissima.

Nell'osservazione diretta delle protuberanze con lo Steinheil durante la totalità, cioè nel pomeriggio, Riccò ha osservato una protuberanza rosea traente un poco al violetto, complessa, grande, delicata, corrispondente per posizione alla maggiore osservata prima con lo spettroscopio; ma la protu-

beranza durante la totalità, quantunque ancora debole, fu stimata alta quasi tre volte di quanto si era vista con lo spettroscopio.

Anche la protuberanza mediocre nella osservazione spettroscopica, era più grande nella diretta, circa nella stessa proporzione, ed era di color roseo e di forma molto diversa; inoltre Riccò ha osservato direttamente un'altra protuberanza, o meglio un gruppo di fiamme diritte, lucidissime, di color roseo chiaro, le quali non avevano corrispondenza nell'osservazione spettroscopica del mattino. Certamente queste fiamme si sono formate dopo l'osservazione spettroscopica; e così pure le differenze di forma nelle protuberanze delle due sorta d'osservazioni, certamente dipendono da variazioni intervenute nel tempo scorso fra esse osservazioni. Anche nelle fotografie della *prismatic camera*, prese dal sig. Taffara, ed in quella della quadruplice camera, prese dalla signorina Mengarini, le protuberanze sono più grandi e più numerose che nella osservazione spettroscopica. Anche il prof. Mengarini colla visione a mezzo del cercatore del Fraunhofer le ha segnate in uno schizzo, fissato subito dopo l'eclisse, di dimensioni assai maggiori rispetto al raggio solare.

In una delle dette fotografie, fatte colla camera prismatica prima della totalità, quando la fotosfera visibile era ridotta ad un sottilissimo filetto, si vedono righe nere di Fraunhofer, di cui poche si prolungano appena fuori dei lembi dello spettro continuo con cuspidi finissime, lucide; nella fotografia seguente, fatta quando il filetto fotosferico cominciava ad interrompersi, un maggior numero di righe fraunhoferiane si vedono invertite oltre gli orli dello spettro continuo, in forma di filetti acuti, lucidi e più numerosi: sono le principali righe lucide della cromosfera. La fotografia successiva dà lo spettro del *flash*, ossia dello strato invertente al principio della totalità; le altre fotografie dànno quello della cromosfera e della corona; la penultima dà il secondo *flash* alla fine della totalità: l'ultima fotografia, dopo la totalità, non è utilizzabile.

In nessuna di queste fotografie si vede traccia della riga verde coronale, $\lambda = 5310$, mentre essa si ottenne nell'eclisse del 1905; invece vi si osserva una riga rossa, coronale, $\lambda = 6374$, che non si ebbe nel 1905.

Queste fotografie spettrali, quando saranno misurate e studiate completamente, daranno altri risultati interessanti.

Gli abbozzi della corona fatti dal prof. Palazzo, dal prof. Mengarini, dal sig. Taffara, dalla signorina Mengarini e dalla signorina Modigliani, dànno con sufficiente accordo la posizione e la forma della corona solare, cioè brevi raggi divergenti dai poli del sole e due ali che si staccano dalle regioni equatoriali: a ponente una semplice, limitata da due pennacchi; a levante un'altra più larga, costituita da tre pennacchi principali, estesa sino alla distanza di poco più di due diametri solari.

Questa forma è presso a poco quella tipica del minimo dell'attività solare, in cui la corona ha due ali equatoriali semplici, come fu nell'eclisse

del 1900; ma questa del 1914 è stata alquanto più complicata. Effettivamente il minimo dell'attività solare era passato da un anno.

Delle otto fotografie prese con la quadruplice camera dalla signorina Mengarini con l'aiuto della signorina Larissa Viaceslavona Norisina, sono

Corona e Protuberanze solari.

Disegno del sig. L. Taffara, ottenuto geometricamente da fotografie e secondo le osservazioni della missione italiana per l'eclisse totale di sole del 21 agosto 1914, osservato in Teodosia (Crimea).

riuscite più complete quelle fatte con lastre sensibili al verde e con filtro di luce verde: vi si osservano le particolarità della corona vista ad occhio nudo, ed anche le protuberanze principali.

Le quattro fotografie, fatte durante la totalità dal prof. Mengarini su lastre autocromiche, e ben riuscite, dànno in modo notevole l'impressione

dell'eclisse visto ad occhio nudo, con le belle sue colorazioni, concordanti con la pittura che ne ha fatto la signorina Modigliani.

Il dott. K. Truschkovsky, che gentilmente ha aiutato la missione in tutti i suoi preparativi, si è incaricato della osservazione e del disegno delle cosiddette *ombre volanti*, che egli ha ben osservato prima del principio della totalità e dopo la fine, col solito aspetto di striscie ondeggianti, parallele, ed alternate, oscure e chiare; ed ha notato in esse pure la colorazione spettrale, che pochi osservatori hanno rilevata.

L'oscurità durante la totalità è stata notevole, assai maggiore che nel 1905, circa come a 40 minuti dopo il tramonto: il prof. Palazzo ha visto la stella *Regolo* nella costellazione del *Leone*.

Dalle osservazioni meteorologiche e magnetiche, quantunque disturbate dal tempo cattivo, il prof. Palazzo ha potuto rilevare che durante l'eclisse vi fu un forte abbassamento di temperatura dello strato superficiale del suolo, e che non vi è stata alcuna sensibile variazione speciale del magnetismo terrestre.

Il prof. Palazzo ha pure determinato gli elementi del magnetismo terrestre in Teodosia: è da notare che la declinazione è risultata orientale di circa un grado.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXXI del Socio C. Ciamician e di P. Silber.

Autossidazioni VIII.

Ci sembrò interessante di conoscere il contegno di alcuni alcaloidi, ed abbiamo iniziato lo studio con la nicotina e la piperidina.

Nicotina. Vennero esposti alla luce 3 matracci da 5 litri, pieni di ossigeno, contenenti ciascuno 12 gr. di nicotina e 100 d'acqua, dal maggio al novembre. Alla fine dell'insolazione il liquido, che s'era fatto leggermente giallastro, aveva lieve reazione acida; nei palloni l'ossigeno era quasi scomparso. Dopo parecchi tentativi preliminari, abbiamo adottato per la elaborazione il seguente processo:

Il prodotto, diluito con acqua, venne trattato con 20 gr. di carbonato baritico e distillato in corrente di vapore acqueo; il distillato alcalino venne saturato con acido cloridrico e portato a secco nel vuoto. Si ebbero, così, 5,3 gr. di cloridrati.

Per accertare la natura delle basi presenti in questa parte del prodotto, i suddetti cloridrati furono trasformati in cloroaurati separando in questo modo la nicotina rimasta inalterata: Il precipitato ottenuto col cloruro d'oro,

purificato dall'acqua, fondeva a 194° ed aveva la composizione del cloroaurato di nicotina.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{14}N_2 . 2HAuCl_4$
Au	47,15	46,79

Dalle acque madri non si potè avere un prodotto unico; vennero perciò liberate dall'oro, ed i cloridrati ottenuti vennero trasformati in cloroplatinati: così si tolsero piccole quantità di ammoniaca allo stato di cloroplatinato ammonico. Convenne ritornare ai cloroaurati: e però il liquido, liberato dal platino, venne trattato nuovamente col cloruro d'oro. Si ebbero dei cristalli gialli, aghiformi, che furono riconosciuti per il cloroaurato di *metilammina*.

Analisi:

	Trovato		Calcolato per $CH_3NH_2 . HAuCl_4 + H_2O$
H_2O	4,46		4,63
			Calcolato per $CH_3NH_2 . HAuCl_4$
C	3,33		2,92
H	1,89		1,46
Au	53,04	53,07	53,15

La parte del prodotto primitivo, che rimane indietro nella distillazione con carbonato baritico, fu liberata a caldo dall'eccesso di quest'ultimo portata a secco per distillazione nel vuoto. Il residuo aveva l'aspetto di una massa bruna e resinosa. Essa venne ripresa con alcool assoluto; e per questo trattamento rimase indietro una polvere giallastra, costituita da sali baritici, i quali si poterono separare, inoltre, aggiungendo molto etere alla soluzione alcoolica concentrata. Liberata così dai sali barici per ripetuti trattamenti con etere, la soluzione alcoolico-eterea lasciò per svaporamento uno sciroppo bruno, che costituiva la maggiore parte del prodotto, circa 30 gr. La sua purificazione presentava peraltro le maggiori difficoltà; dopo varî tentativi, ci risolvemmo di separare allo stato di picrato la base in esso contenuta. Lo sciroppo, in proporzioni di 10 gr. per volta, sciolto in acqua (1 $^1/_2$ litro), venne trattato con una soluzione satura acquosa d'acido picrico (1 $^1/_2$ litro). Si forma un precipitato resinoso, brunastro, che resta aderente alle pareti del vaso, mentre dal liquido, di apparenza lattiginosa, si può far separare, sbattendolo in un agitatore meccanico, un secondo precipitato giallo, di aspetto assai migliore. Quest'ultimo, purificato ripetutamente dall'alcool, si presentò in prismetti o in mammelloni, che fondevano a 168°. La sua composizione corrisponderebbe al picrato d'una base dalla formola

$$C_{10}H_{14}N_2O .$$

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{20}O_{15}N_6$
C	41,45	41,51
H	3,31	3,14

Questo prodotto ha la composizione della *ossinicotina* ottenuta da Pinner e Wolffenstein [1] per ossidazione della nicotina con acqua ossigenata. Il punto di fusione del picrato, che questi autori indicano a 154-158°, è, per altro, alquanto inferiore a quello da noi trovato. Volendo accertare la natura del composto da noi avuto, bisognerebbe riprenderne lo studio.

Il sale baritico, insolubile nell'alcool e nell'etere, sopra menzionato, venne anzitutto purificato in soluzione acquosa con nero animale ed indi trattato con la quantità voluta di acido solferico. Svaporando il liquido, separato dal solfato baritico, si ebbe uno sciroppo brunastro da cui si depositarono dei cristalli che furono purificati dall'acqua. La sostanza così ottenuta si presentava in aghetti raggruppati, fusibili a 234°; e fu riconosciuta per l'*acido nicotinico*. La sua quantità era, peraltro, assai esigua (1 gr. da 36 di nicotina); ad essa corrisponde la piccola quantità di metilammina summenzionata.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_5O_2N$
C	58,72	58,53
H	4,06	4,06

L'autossidazione della nicotina alla luce dà, assieme con molta resina, come prodotto principale la suddetta ossinicotina; e, per ulteriore autossidazione di questa, l'acido nicotinico e la metilammina. Il processo si potrebbe rappresentare con il seguente schema, che per altro è incerto in quanto riguarda la costituzione dell'ossinicotina. I prodotti di ossidazione dell'acido pirrolidinico della nicotina potrebbero essere stati anidride carbonica ed acido formico.

$$\underset{\text{nicotina}}{C_{10}H_{14}N_2} \longrightarrow \underset{\text{ossinicotina}}{C_{10}H_{14}ON_2} \longrightarrow \underset{\text{ac. nicotinico}}{(C_5H_4N)COOH} + \underset{\text{metilammina}}{NH_2 . CH_3}$$

Come si vede, la nicotina viene ossidata alla luce, in parte, assai profondamente.

Piperidina. Vennero esposti alla luce, dal maggio al novembre, complessivamente 40 gr. di questa base sciolti in 400 cc. d'acqua. Risultò un liquido ancora alcalino, giallo-brunastro; l'ossigeno nei matracci era quasi scomparso.

L'elaborazione venne fatta in modo analogo alla precedente esperienza. Il prodotto venne anzi tutto distillato in corrente di vapore per eliminare la base libera. Si ebbero 24 gr. di cloridrati, che furono cristallizzati dall'alcool. Il punto di fusione 240° (Ladenburg trovò 237°) trovato, è quello del cloridrato di piperidina. Con la parte rimasta disciolta si preparò il cloroaurato, ma anche questo dimostrò trattarsi della stessa base; fondeva a 216°.

[1] Berichte, vol. 24, pag. 64; ibid., vol. 25, pag. 1428; ibid., vol. 28, pag. 460; ibid., vol. 34, pag. 2412; Beilstein, vol. IV, pag. 858.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}N.HAuCl_4$
Au	46,86	46,40

Il liquido rimasto indietro nella precedente distillazione, venne trattato con carbonato baritico, e nuovamente distillato. La base raccolta dette 8,2 gr. di cloridrato di piperidina. Dei 40 gr. della piperidina impiegata, si riebbero dunque 32 gr. di cloridrato.

La soluzione rimasta indietro, venne liberata a caldo dall'eccesso di carbonato baritico, portata a secco nel vuoto; ed il residuo, colorato in bruno e di aspetto resinoso, venne trattato. come nella precedente esperienza con alcool ed etere. I sali baritici insolubili furono così separati: dal liquido alcoolico etereo si ebbe una materia sciropposa (15,9 gr.), che alla ulteriore ricerca presentò non lievi difficoltà. Una parte di essa venne salificata con acido cloridrico e trasformata successivamente in cloroaurato ed in cloroplatinato. Il primo si dimostrò nuovamente per quello di piperidina dal punto di fusione 219°.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_5H_{11}N.HAuCl_3$
C	14,30	14,11
H	3,08	2,82
Au	45,98	46,40

Il secondo, preparato dalle acque madri del primo e separato dal cloroplatinato ammonico pure presente, fondeva a 200° e dette all'analisi numeri che farebbero supporre la presenza di una base ossigenata, della formola $C_5H_{11}ON$ (1).

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $(C_5H_{11}ON)_2H_2PtCl_6$
Pt	31,27	31,88

La quantità di questo sale era, peraltro, insufficiente per un ulteriore esame.

Un'altra parte del prodotto resinoso suddetto, venne distillata con soda caustica per eliminare le basi, e, dopo questo, acidificata con acido solforico ed esaurita con etere. Si ebbero molto acido formico ed un piccolo residuo cristallino, che, purificato dall'acqua, fondeva a 92-96°. La sua piccola quantità non consentiva un ulteriore esame; ma potrebbe darsi si trattasse di acido glutarico, che fonde a 97°,5.

(1) È probabile che si tratti dell'aldeide aminovalerianica. Vedi Wolffenstein, Berichte, vol. 25, pag. 2781; 26, pag. 2991 e Haase e Wolffenstein, Berichte, vol. 37, pag. 3228; e poi Beilstein I, pag. 949, e Supplemento I, pag. 480.

I sali baritici sopra menzionati contenevano una parte facilmente solubile nell'acqua calda, ed una assai poco solubile. Dalla prima si ebbero, dopo avere eliminato il bario con acido solforico e successiva distillazione, notevoli quantità di acido formico. Il residuo della distillazione venne unito al liquido che si ebbe dopo avere precipitato il bario della porzione meno solubile. Questa soluzione dette, per concentrazione, delle croste cristalline, che, purificate dall'acqua, fondevano a 185-186° e furono riconosciute per *acido succinico*. Ne abbiamo analizzato il sale argentico.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_4O_4Ag_2$
Ag	64,85	65,06

La piperidina si autossida, alla luce, in minore misura della nicotina; ma anche essa, per quanto si altera, va soggetta ad una ossidazione profonda. Si forma, anche in questo caso, come primo prodotto, una base ossigenata, che non abbiamo potuto identificare; ma non è improbabile si tratti del composto ottenuto, per la prima volta, da R. Wolffenstein, per ossidazione della piperidina con acqua ossigenata, che è un ossido isomero della aldeide δ-aminovalerianica. Quest'ultima per ossidazione con acido nitrico, dà l'acido succinico [1], che noi pure abbiamo trovato per i prodotti dell'autossidazione.

Aggiungeremo a questa Nota, quale appendice, i risultati dell'autossidazione della

Pinacolina. Dai nostri studî sulla scissione di questo interessante chetone alla luce [2], appariva assai probabile che esso si scomponesse secondo lo schema

$$CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}-CO-CH_3 \longrightarrow \overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}=CH_2 + CH_3-CHO$$

in butilene ed aldeide acetica, analogamente alla scissione aldeidica dei ciclochetoni. Siccome l'autossidazione di questi ultimi corrisponde sempre alla scissione idrolitica, così abbiamo pensato che, studiando l'autossidazione della pinacolina alla luce, si poteva trovare una conferma del processo suddetto. Così avviene di fatto; ed i prodotti ora ottenuti sono: trimetilcarbinolo ed acido acetico,

$$CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}-CO-CH_3 \longrightarrow CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{CH_3}{|}}{C}}.OH + CH_3-COOH\ ;$$

[1] Beilstein, Supplemento, I vol., pag. 480.

[2] Questi Rendiconti, vol. 19, I, pag. 539 (1910); e Berichte, vol. 43, pag. 1349.

il primo dà, poi, per ulteriore ossidazione, acetone, formaldeide, acido formico e carbonico. Per ossidazione della pinacolina con permanganato o con acido cromico si ottiene invece rispettivamente l'acido trimetilpiruvico (1) o l'acido trimetilacetico.

Alla luce vennero esposti 7 palloni, di 3 litri, pieni d'ossigeno, contenenti ciascuno 5 gr. di pinacolina e 100 d'acqua, dal giugno al novembre. Aprendo i matracci, si svolse anidride carbonica. Il contenuto dei medesimi venne neutralizzato con carbonato sodico, impiegando 160 cc. della soluzione normale, e distillato.

Il residuo della distillazione contiene molta *aldeide formica*, che venne riconosciuta al suo composto con la p-difenildiidrazina, che fonde a 220°; per eliminare l'aldeide, si portò a secco a b. m. in corrente di anidride carbonica. Il residuo salino non reagisce con la fenilidrazina, ciò che prova l'assenza dell'acido trimetilpiruvico menzionato più sopra. Una parte del sale venne trattata col nitrato d'argento: si ebbe, a caldo, un forte annerimento causato dalla presenza di *acido formico*; e l'ebollizione venne protratta fino a completa ossidazione di quest'ultimo. Dal filtrato si ebbero gli aghi bianchi di *acetato argentico*.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_2H_3O_2Ag$
Ag	64,14	64,66

Il distillato ottenuto più sopra, che aveva spiccato l'odore di acetone e dell'alcool butilico terziario, ridotto per ulteriore rettificazione a 75 c., dette, per salatura con carbonato potassico, 17 gr. di un liquido oleoso. Per separare l'*acetone* in esso contenuto, lo abbiamo trattato a freddo con 15 gr. di cloridrato di semicarbazide in una soluzione di 15 gr. d'acetato potassico in 40 d'acqua. Dopo qualche giorno venne raccolto il precipitato (8,4 gr.) del semicarbazone dell'acetone, che, purificato dell'alcool metilico, fondeva a 190-191° (2).

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_9ON_3$
N	36,61	36,54

Il filtrato dal semicarbazone dell'acetone venne distillato; e dal liquido passato si separò, per salatura con carbonato potassico, l'alcool butilico terziario. Per togliere le ultime traccie di acetone, il trattamento con la semicarbazide venne ripetuto. Si ebbe così un liquido che, seccato sull'ossido di bario, bolliva a 81-83°. Per l'analisi venne raccolta la porzione bollente

(1) Vedi Glücksmann, Monatshefte für Chemie, 1889, pag. 773.

(2) Questo è il vero punto di fusione del semicarbazone dell'acetone. Thiele e Stange trovarono 187°. (Berichte, vol. 27, pag. 32).

a 82°, che si solidificò. Fondeva a 25°. Queste sono le costanti del *trimetilcarbinolo* (1).

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_{10}O$
C	64,86	64,86
H	13,36	13,51

L'autossidazione della pinacolina era completa. Il contegno di questa sostanza tanto alla scissione aldedica quanto nell'autossidazione, invoglia a studiare il comportamento, alla luce, di altri composti del genere.

Infine vogliamo ricordare il valido aiuto che durante queste ricerche ci hanno prestato, prima il dott. G. B. Bernardis, e poi il dott. Emilio Sernagiotto.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XXXII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Le esperienze che descriviamo in questa Nota sono state fatte in seguito ad una comunicazione del dott. Eugenio Bernhard di Schwanheim sul Meno. Egli ci scriveva gentilmente, circa un anno fa (nel dicembre 1913), di avere osservato che, esponendo alla luce aldeide benzoica contenente benzoato di rame, si forma un deposito speculare di rame metallico sulle pareti del vaso, che all'oscuro scompare. Questo contegno non è limitato al benzoato di rame, perchè anche quello di piombo mostra un analogo comportamento. Egli mise a nostra disposizione queste sue osservazioni, per cui noi vivamente lo ringraziamo.

Per esaminare più attentamente questi processi, abbiamo da prima eseguito la seguente esperienza, operando in soluzione benzolica per evitare l'impiego dell'aldeide benzoica come solvente che, essendo presente in eccesso, avrebbe dato luogo alla formazione dei suoi prodotti di polimerizzazione.

Benzoato rameico ed *aldeide benzoica*. Alla luce vennero esposti, dal marzo al settembre, 7 tubi contenenti ciascuno 6 gr. di benzoato di rame e 2 gr. di benzaldeide sciolta in 50 c. di benzolo. Durante l'insolazione la polvere azzurra si raggruma e prende un colore brunastro, mentre sulle pareti del tubo comparisce lo specchio metallico; in fine si trova nel tubo una massa cristallina grigia, ed accanto ad essa una polvere bruna commista ad alcuni cristalli azzurri, sospeso il tutto in un liquido giallo-brunastro.

La parte solida venne raccolta in filtro; pesava 10 gr. ed era formata, per la parte maggiore, da prismetti lunghi dai 2 ai 5 mm. e dalla menzio-

(1) Vedi Butlerow, Liebigs Annalen der Chemie, vol. 162, pag. 232.

nata polvere bruna metallica. La separazione presentava da principio grandi difficoltà, perchè la sostanza cristallina si alterava assai facilmente per trattamento coi varî solventi di uso ordinario; siamo riusciti invece abbastanza bene ad asportare i cristalli dal miscuglio per mezzo di una bacchetta elettrizzata di ebanite, sulla quale essi venivano di preferenza a fissarsi. Ripetendo più volte l'operazione, abbiamo ottenuto un prodotto abbastanza omogeneo. Esso appariva formato da piccoli cristalli senza colore, che, peraltro, in massa avevano un colore grigio; nell'acqua erano insolubili; si scioglievano invece nell'acido cloridrico concentrato, dando un liquido senza colore, da cui, per aggiunta di acqua, si separava l'acido benzoico, e per trattamento con potassa un precipitato rosso di ossido rameoso. Non ostante i numeri imperfetti dell'analisi, crediamo che la sostanza in parola fosse *benzoato rameoso*.

Analisi:

	Trovato	Calcolato per $C_6H_5COO\,Cu$
C	44,61	45,50
H	2,79	2,73
Cu	35,08	34,42

Il rimanente del prodotto venne liberato da questo sale per trattamento con ammoniaca, in cui il benzoato rameoso si scioglie facilmente: escludendo l'aria, si ottiene un liquido senza colore, che altrimenti diventa intensamente azzurro. Il residuo è una polvere bruna formata in grande prevalenza da *rame metallico*.

La soluzione benzolica, colorata in giallo brunastro, all'aria, si fece verde intensa, ciò che prova che essa conteneva ancora del sale rameoso. Svaporando il solvente, rimase indietro una massa cristallina, che aveva l'odore della benzaldeide. Ripresa con etere petrolico, restarono indietro dei cristalli azzurri (2,9 gr.), evidentemente di benzoato rameoso. La parte solubile nell'etere petrolico, liberata dal solvente (29 gr.), era formata precipuamente da *acido benzoico*, che venne tolto con carbonato sodico. Il resto (9 gr.) conteneva ancora dell'aldeide benzoica, che fu eliminata col bisolfito, ed una parte oleoso-resinosa (3,2), che non venne ulteriormente esaminata.

Il benzoato rameico, per azione dell'aldeide benzoica alla luce, viene dunque ridotto a benzoato rameoso ed a rame metallico, mentre si forma acido benzoico; la reazione appartiene però alle reciproche riduzioni ed ossidazioni che la luce favorisce di preferenza. È assai probabile che l'acqua intervenga in tale processo; ma per poter affermare questo con sicurezza, converrà ripetere l'esperienza escludendo ogni traccia di umidità, ciò che ci proponiamo di fare in seguito. Intanto pubblichiamo anche una seconda esperienza fatta col benzoato di rame ed aldeide acetica.

Benzoato rameico ed *aldeide acetica*. Per questa prova preliminare abbiamo esposto al sole, dal maggio al dicembre, 5 gr. di benzoato rameico

sospeso in 50 c. d'aldeide acetica. La massa azzurra del primo imbrunisce a poco a poco, e in fine si trasforma in una polvere rosso-bruna, mentre sulla parete del tubo comparisce lo specchio di rame. Il liquido si mantiene senza colore.

Per l'elaborazione si filtrò; il deposito solido venne analizzato.

Analisi:

C 0,77 H 0,63 Cu 98,91

e risultò formato da rame metallico a cui aderiva poca materia organica. Venne dosato tutto il rame, che si era liberato per azione della luce, tanto quello raccolto in filtro, quanto quello aderente al tubo; e se ne ebbero 0,951 gr., da cui risulta che il 91,5 per cento del benzoato impiegato era stato ridotto a rame metallico.

Svaporando l'aldeide acetica, impiegata in eccesso, restò indietro un residuo cristallino, che aveva odore di paraldeide e di *acido acetico*. Ripreso con etere petrolico, dopo essere stato nel vuoto sulla soda, si asportò l'*acido benzoico* formatosi nella riduzione. Il residuo insolubile, di colore verdognolo, dava, con potassa in soluzione acquosa, un precipitato rosso di protossido di rame. Erano però presenti piccole quantità di sale rameoso.

Il benzoato rameoso viene dunque ridotto, alla luce, dall'aldeide acetica, prevalentemente a rame metallico, mentre si libera acido benzoico ed evidentemente si forma acido acetico. Anche questa reazione verrà ripresa; ed è pure nostra intenzione di studiare il contegno di altri sali metallici alla luce, in presenza di aldeidi e di chetoni.

Infine porgiamo i nostri ringraziamenti al dott. Emilio Sernagiotto, che ebbe efficacemente a coadiuvarci in questa breve ricerca.

Patologia vegetale. — *Il mal dell'inchiostro nelle giovani pianticelle dei castagneti e dei semenzai.* Nuova Nota del Socio Giovanni Briosi e di Rodolfo Farneti (1).

Allorquando in un castagneto il *male dell'inchiostro* (morìa) piglia piede ed infierisce, si formano di frequente in esso delle chiazze più o meno estese ove gli alberi in gruppo muoiono producendo delle radure, che veggonsi talora interamente spoglie di alberi, tal'altra disseminate di tronchi secchi, residui delle piante morte ma non abbattute.

(1) Note precedenti:

Briosi G. e Farneti R., *Sulla morìa dei castagni* (*male dell'inchiostro*): prima Nota (Atti Istituto botanico di Pavia, vol. XIII, pag. 291-298, con 1 tav. litogr.), anno 1908; *Intorno alla causa della morìa dei castagni* (*male dell'inchiostro*) *ed ai mezzi per combatterla* (ibid., vol. XIV, pag. 47-51); *La morìa dei castagni* (*male dell'inchiostro*): *osservazioni critiche ad una Nota dei sigg. Griffon e Maublanc* (ibid., vol. XV,

In questi spiazzi, se, per disseminazione naturale, nascono dei castagnoli, essi non rimangono a lungo in vita, come non riescono ad attecchirvi le pianticelle che artificialmente ivi si ripiantino. A poco a poco gli uni e le altre muoiono: ed in capo a due o tre anni, o, tutt'al più, dopo cinque o sei, delle nuove pianticelle nessuna rimane viva.

Quando il ripiantamento vien fatto con alberelli adulti rivestiti di forte corteccia, se essi riescono ad attecchire (il che non sempre avviene), resistono qualche anno di più, ma non tanto da poter ripopolare la radura.

È per tale ragione che gli spiazzi formatisi nei castagneti attaccati dalla *morìa* più non si ripiantano e rivestono, come non si sostituiscono nella selva gli alberi che isolatamente il male qua e là uccide.

Che nel luogo stesso, ove un albero spontaneamente muore, non se ne debba subito ripiantare un altro, è cosa *ab antiquo* risaputa, poichè esso non vi attecchisce o presto muore. Ciò è dovuto alla presenza di rizomorfe o d'altri micelii fungini nemici che la pianta che muore abbandona nel terreno: micelii i quali dapprima vivono come saprofiti sulle radici della pianta perita; di poi, come parassiti sopra le radici vive della pianta sostituitavi.

In egual modo peraltro non si può spiegare la morte delle giovani piantine nelle radure prodotte dal *male dell'inchiostro*, poichè sulle radici delle piante che questo morbo uccide non si trovano di solito nè rizomorfe, nè altri micelii patogeni. Altre spiegazioni quindi si sono escogitate, diverse e varie fra loro ma tutte partenti dal concetto che la causa del male va ricercata nel terreno.

Così, alcuni sostengono che le piante muoiono perchè il terreno più non contiene in quantità sufficiente alcuni degli elementi minerali che sono ad esse indispensabili, o perchè esso difetta dell'*humus* necessario alla vita delle piante stesse. Altri ritengono che trattasi del parassitismo di micelii che per speciali condizioni sviluppansi nel terreno ed invadono le ultime barbicelle delle radici che restano uccise (Ducomet). Altri, partendo dal presupposto che le micorizze siano indispensabili alla vita dei castagni, fanno risalire la causa della *morìa* ad un micromicete (*Mycelophagus*) che attaccherebbe e distruggerebbe i micelii micorizzici e, di conseguenza, anche le micorizze (Mangin). Altri invece, riconoscendo che i castagni possono vivere e prosperare anche senza le micorizze, ritengono che gli stessi micelii, che in condizioni normali concorrono alla formazione di queste vivendo con le radici in consorzio mutualistico, quando invece nel suolo l'*humus* difetta, non trovando nel terreno

---

pagg. 43-51); *Nuove osservazioni intorno alla morìa dei castagni (male dell'inchiostro) e sua riproduzione artificiale* (ibid., vol. XIV, pagg. 327-334); *A proposito d'una Nota del dott. Leonello Petri sulla morìa dei castagni (male dell'inchiostro)*, in Rendic. Accad. Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 6; *Ancora sulla morìa del castagno (male dell'inchiostro), in risposta al sig. dott. L. Petri* (Rendic. Accad. Lincei, vol. XXII, ser. 5ª, II sem., fasc. 2°).

le sostanze organiche delle quali abbisognano, le sottraggono alle radici stesse trasformandosi in veri parassiti di queste, ed uccidendo le piante (Delacroix). Infine, non manca chi attribuisce la morte a misteriose e mal definite sostanze tossiche escrete ed abbandonate nel terreno dalle piante malate che muoiono.

Le osservazioni ed i fatti che qui sotto esporremo serviranno a portar nuova luce in questo intricato contrasto di ipotesi ed opinioni, ed a riconfermare ancora una volta quanto noi abbiamo dimostrato e sostenuto nelle nostre precedenti Note e Memorie: cioè che la causa del male non risiede nel terreno e non sale dalle radici alle parti aeree della pianta, ma, viceversa, da queste a quelle discende: e che è semplicemente l'opera del parassitismo di un micete epigeo.

***

Nella scorsa primavera, in alcuni castagneti della valle del Serchio in provincia di Lucca, la *moria* delle giovani pianticelle di castagno era frequente: onde la nostra attenzione fu rivolta in modo speciale a ricercarne la causa. Eravamo ai primi di maggio, e molte piante da poco germinate avevano appena spiegato le prime fogliole. Apparentemente la maggior parte di esse era vegeta e prosperosa; ma un attento esame mostrava in parecchie, sul fusticino, delle macchiuzze o delle brevi striscie longitudinali livide con necrosi del tessuto la quale interessava l'intero spessore della corteccia; ed il microscopio rivelava in esse (in sezioni tangenziali) un micelio fungino non ancora sporificato.

Trattavasi di minuti cancri incipienti che erano sparsi sul fusticino, tanto nella parte soprastante ai cotiledoni, quanto nell'ipocotile, benchè quivi in minore quantità.

Estendendo l'esame alle pianticelle dell'anno precedente, nate cioè nella primavera del 1913, trovammo pure dei piccoli cancri sull'ipocotile, alcuni dei quali formanti pustole costituite da stromi immaturi. In pianticelle di tre anni, malate ma non morte, il fatto si ripeteva; cancri trovavansi tanto verso la base dell'ipocotile quanto nella regione del colletto. In uno di questi castagnoli di tre anni il cancro basale, anzi, era già disceso, con larga striscia nerastra, nel fittone della radice, mentre altri castagnoli trovammo di già morti in seguito a forte attacco del male, avvenuto nella parte inferiore del fusto: infine, alcuni castagnoli di cinque anni erano morti per attacco nella regione del colletto.

In tutti questi cancri trovavasi sempre un micelio, spesso con stromi non peranco differenziati, o sporificati sotto forme di *Fusicoccum* o di *Cytosporella*.

***

Ai primi dello scorso luglio, dal vivaio forestale di Gozzano in provincia di Novara, ci furono mandate delle piantine di castagno malate, per ricercare la causa del deperimento loro. Recatici sul luogo, trovammo che le pianti-

celle sofferenti, o morte, erano affette da cancri simili a quelli dei castagnoli della valle del Serchio, anzi in uno stadio più avanzato.

Il vivaio di Gozzano contava circa duecentomila pianticelle, tutte nate nella primavera da castagne seminate nel precedente autunno. Di questi castagnoli, circa diecimila erano di già morti, e gli altri vedevansi morenti o fortemente compromessi.

Dall'inchiesta fatta sul luogo emerse:

1) che il vivaio di Gozzano si trovava a notevole distanza da qualunque castagneto;

2) che anche negli anni scorsi si seminarono, nello stesso terreno, delle castagne, e si ebbero castagnoli sani, senza mortalità;

3) che il vivaio era fatto a regola d'arte e trovavasi in ottime condizioni poichè il terreno era sciolto, profondo, provveduto di regolari canali di scolo, con aiuole rialzate e senza ristagno o infiltrazione di acqua. Inoltre il terreno era fertilissimo e ricco di *humus*, sicchè le piante in poco tempo avevano raggiunto un grande sviluppo, arrivando e sorpassando un metro d'altezza;

4) che nel vivaio si coltivavano diverse altre essenze, ma solo quella del castagno era malata.

Allora, non sapendo come orientarci, sospettammo che il male potesse provenire dalle castagne che avevano servito per la semina. Ed infatti, dalle informazioni da noi prese risultò che queste eransi avute in parte da castagneti del comune di Armeno. Ci recammo ad Armeno, ed una accurata ispezione assodò che, purtroppo, in questi castagneti eranvi molti alberi attaccati dal *male dell'inchiostro*, tanto nei rami, quanto nel tronco e nelle radici. Era quindi evidente che nel vivaio la malattia era stata portata per mezzo delle castagne che avevano servito per la semina.

* * *

Nel vivaio di Gozzano, il male si manifestava con gli stessi caratteri di quelli dei castagneti della valle del Serchio (caratteri che sono identici a quelli di tutti i castagni, qualunque sia la loro età, che muoiono per *male dell'inchiostro*: in tutti si hanno i cancri caratteristici prodotti da micosi). Anche nei castagnoli di Gozzano il male aveva preso non solo le parti aeree ma, talora, anche le radici. E le foglie disseccavano contemporaneamente al fusto, o prima di esso, rimanendo secche attaccate alla pianta: precisamente come avviene nei grossi alberi attaccati dal *male dell'inchiostro*, quando muoiono della cosiddetta forma *apopletica*.

Nel vivaio scegliemmo, prendendole dalle diverse aiuole, oltre un centinaio di piantine in tutti i gradi di sofferenza, con tutte le loro radici e la terra che vi aderiva, e le portammo al Laboratorio per sottoporle ad esame più accurato e minuto.

Nelle centoventidue piantine esaminate, ne trovammo centodiciotto che presentavano cancri più o meno sviluppati, o sul fusto, o nella regione emersa dell'ipocotile.

Delle quattro che non avevano cancri nella parte aerea, una era sana, e le altre tre erano malate nella radice.

I cancri si manifestavano come depressioni o lividure della corteccia, di vario aspetto, generalmente elissoidali-allungate o lineari, cioè sotto forma di striscie più o meno appariscenti nel fusto ancor verde; spesso il cancro abbracciava l'intera circonferenza del fusticino, ed allora vi produceva una specie di strozzatura anulare.

Frequentemente nei cancri eranvi delle pustole, a forma di verruchette dovute allo sviluppo di uno stroma fungino, subcorticale, non ancora differenziato, nè sporificato: in alcuni, per altro, si intravvedeva di già una struttura irregolarmente valsoidea. Questi stromi esaminati più tardi, sopra piantine morte raccolte nello stesso vivaio nel mese di novembre, si trovarono in parte sporificati, come nel Lucchese, sotto forma di *Fusicoccum* e *Cytosporella*. Erano peraltro diversi dal *Fusicoccum* da noi altrove descritto, e più vicini, se non identici, alle forme spermogoniche descritte dal Fuckel come appartenenti al ciclo evolutivo della *Melanconis modonia* Tul., e simili altresì ad alcune forme conidiche da noi ottenute in coltura, od osservate in alcuni stadii di sviluppo della nostra *Melanconis perniciosa*.

Non intendiamo peraltro dedurre, da queste apparenze, che tali forme spermogoniche siano identiche alle forme del parassita da noi studiato e descritto nelle nostre precedenti Note, poichè ce ne manca ancora la conferma colturale e sperimentale.

***

Studiamo ora attentamente l'origine ed il percorso delle infezioni.

Per rispetto all'origine, le infezioni si potevano distinguere, topograficamente, in *aeree* (sul fusto) ed in *radicali* (sulla radice). Delle prime, alcune erano *basali* o *cotiledonali*, cioè alla base del fusto in corrispondenza all'inserzione dei cotiledoni; altre trovavansi nell'ipocotile.

Ora, dei centoventidue castagnoli presi in esame in Laboratorio, uno, come si disse sopra, mostravasi perfettamente sano; centodiciotto presentavano infezioni aeree; tre, infezioni radicali. Tra le prime, quarantatrè erano basali o cotiledonali, e le piantine con infezioni basali o cotiledonali, generalmente, avevano altresì una o più infezioni (non di rado le più gravi) nella parte superiore del fusto. In molti casi queste infezioni basali provenivano dal seme, ed erano state trasmesse al fusticino direttamente dal seme stesso per mezzo del picciuolo dei cotiledoni.

L'esame delle tre piantine con infezioni radicali rivelò quanto segue: in una l'infezione si era iniziata a fior di terra, da dove era scesa alla radice; e la pianta mostrava anche una seconda infezione alla base del fusto, che

non comunicava colla prima. Che l'infezione della radice provenisse dal fusticino e vi si fosse propagata in direzione discendente, lo dimostravano lo stato di necrosi dei tessuti e il degradare della loro colorazione patologica che si estingueva a un terzo della radice lasciando perfettamente sani i due terzi inferiori.

In un'altra delle dette pianticelle l'infezione si era iniziata a circa sei centimetri di profondità dalla superficie del terreno, ed aveva proceduto parimenti con direzione discendente, degradando verso l'estremità della radice, che mantenevasi tuttora sana.

Nella terza, la radice era mozzata a due terzi della sua lunghezza, probabilmente per opera di qualche larva d'insetto. Nella corrispondente ferita non cicatrizzata si scorgeva un processo infettivo con percorso ascendente, che aveva risalito la radice fino a raggiungere l'ipocotile dove s'insinuava nel legno nel quale aveva prodotto delle striature brune. In corrispondenza di queste striature, l'esame microscopico mostrava numerose colonie di bacterii, che non si osservavano nei casi precedenti, sicchè questo si può ritenere come un caso eccezionale di marciume dovuto ad accidentale infezione bacterica della ferita, completamente estraneo quindi alla causa della mortalità delle altre piantine del vivaio.

Per rispetto al decorso del male ed agli effetti da esso prodotti, si rilevò che, dei centoventidue castagnoli sottoposti a studio, quarantaquattro avevano il fusto tuttora verde o solo in parte secco, ed in settantaquattro il fusticino era completamente morto. Di queste ultime settantaquattro piantine, in cinquantadue era morta anche tutta la radice la quale mostravasi più o meno marcescente per tutta la sua lunghezza (con intensità peraltro decrescente dall'alto al basso); in sette, una porzione di radice verso l'estremità inferiore era ancora sana (da tre a dieci centimetri); in cinque era sana l'intera metà inferiore della radice, ed in dieci tutta la radice sana era sino al colletto.

Delle quarantaquattro piantine dal fusto ancor verde, ventitrè avevano la radice perfettamente sana (cosa naturale, perchè non avevano cancri alla base del fusto o solo incipienti e leggieri); tre avevano cancri nell'ipocotile e nel fusto, i quali discendevano sino alla radice ed in essa si prolungavano; ne avevano uccisa di già la parte superiore, ma sana era tuttora la parte inferiore.

Tutte le radici e le porzioni di radici ancora sane, portavano barbe e barbicelle pure sane.

In dieci castagnoli che avevano alla base del fusticino cancri abbraccianti e discendenti nelle radici, queste erano interamente morte e, in alcuni casi, anche marcescenti.

Questi diversi casi non erano, come si potrebbe sospettare, stadii successivi della malattia; poichè le loro differenze derivavano evidentemente dal punto iniziale del processo infettivo e dalla gravità dell'infezione.

Spesso a produrre la marcescenza della radice aveva altresì contribuito grandemente la presenza di gallerie longitudinali scavate da insetti nel fittone.

Anche nei castagnoli avveniva quanto si verifica nei grossi castagni: cioè, quando il cancro raggiunge la radice, in questa si espande e discende con maggiore rapidità che non nel fusto, onde la morte della radice non di rado precede quella della parte aerea della pianta che muore poi d'un tratto della forma così detta *apopletica*.

Avvertiamo, ancora, che nel vivaio di Gozzano, oltre i castagnoli che presentavano i caratteri del *male dell'inchiostro*, alcuni se ne trovavano che, pure avendo senza cancri e più o meno vegeta e sana tutta la parte aerea, avevano la radice mutilata, probabilmente per opera delle larve di *Melolontha vulgaris* o delle *Grillotalpe*; ed altresì, altri che presentavano il fittone della radice scavato longitudinalmente da gallerie di larve d'insetti. Alcune di queste gallerie erano invase da micelii fungini che ne avevano provocato la marcescenza. Nei castagnoli a radice mutilata le ferite eransi cicatrizzate, e le piante vivevano tuttora.

I castagnoli con galleria longitudinale nel fittone radicale erano quasi tutti morti, senza che nel fusto i cancri si fossero formati.

Notiamo, da ultimo, che, allorquando nei mesi di agosto e settembre rivisitammo il vivaio, si trovò che nelle aiuole (circa cinquecento metri quadrati), nelle quali si erano lasciate le piantine malate, quelle di esse con cancri erano tutte morte senza che la malattia si fosse, almeno apparentemente, propagata alle sane contigue: il che si può spiegare col fatto che sopra queste piante malate il parassita non aveva ancora cominciato a sporificare, ciò che avvenne solo nel tardo autunno.

Conclusioni.

Da quanto abbiamo sopra esposto, emerge:

1) che non solo gli alberi adulti ma anche le piante giovanissime ed altresì i semi germinanti possono essere attaccati dal *male dell'inchiostro*, e possonsi avere larghe epidemie di *male dell'inchiostro* anche nei semenzai, ciò che finora non si era avvertito;

2) che i sintomi ed i caratteri, coi quali muoiono i castagnoli, sono identici a quelli che si manifestano negli alberi che per tale morbo scompaiono dalle selve;

3) che i semenzai ed i vivai vanno attentamente sorvegliati, e le pianticelle loro non debbonsi distribuire se non si è sicuri che siano perfettamente sane, cioè anche senza macchie sospette e cancri i quali spesso, per essere minutissimi e poco appariscenti, facilmente sfuggono all'osservazione superficiale;

4) che quello che avviene nei castagnoli e nei semenzai pure conferma che il *male dell'inchiostro* non si inizia nelle radici e non segue un andamento centripeto: che esso è prodotto da una micosi od infezione crittogamica che attacca da prima le parti aeree della pianta (rami e fusti), poi scende alle radici: che talora l'attacco può aver luogo anche direttamente nell'ipocotile stesso, ed altresì nella parte superiore della radice del seme germinante;

5) che il male non si può attribuire ad esaurimento del terreno;

6) che non occorre l'opera di uno speciale micromicete, il *Mycelophagus*, che attacchi e distrugga le micorizze, come vuole Mangin;

7) che nemmeno il male è prodotto dai micelii micorizzici divenuti parassiti per deficienza di *humus* nel terreno, come pensa Delacroix;

8) che nemmeno fa d'uopo di pensare all'esistenza di sostanze misteriose e tossiche, prodotte ed abbandonate nel terreno dalle piante che muoiono.

La quistione micologica non è di capitale importanza per la patogenesi, la profilassi e la cura del male. Essa verrà interamente chiarita e risolta più tardi quando le ricerche in proposito saranno compiute e tutti i lati del problema micologico studiati. Sino da ora possiamo peraltro affermare che, quando anche si riuscisse a dimostrare che non un solo fungillo ma parecchi concorrono a produrre il complesso delle alterazioni che vanno sotto il nome di *moria* o di *male dell'inchiostro* del castagno, ciò non infirmerebbe quanto noi abbiamo ripetutamente affermato nelle nostre precedenti pubblicazioni e che anche le attuali ricerche sull'infezione dei castagnoli e dei vivai riconfermano.

Fisica. — *Emissione ed assorbimento del gas residuo nei tubi del Röntgen, ed emissione dei raggi X*[1]. Nota del Corrispondente P. Cardani.

È noto che i tubi del Röntgen, per raggiungere le migliori condizioni per l'emissione dei raggi x, devono subire un lungo processo di esaurimento, allo scopo di eliminare i gas che si trovano occlusi negli elettrodi o nelle pareti di vetro: e siccome questi gas non si sprigionano liberamente neppure con le rarefazioni più spinte, si sa ancora che, per ottenere l'esaurimento è necessario di circondare i tubi con speciali involucri, per es. di amianto, e portarli ad elevate temperature, mandando anche attraverso i medesimi una corrente sufficientemente intensa, sapendosi che la scarica elettrica facilita notevolmente l'emissione dei gas occlusi. Ed è altresì noto che, per evitare lo

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Parma.

annerimento dei tubi per la polverizzazione del platino anticatodico, i costruttori aggiungono un terzo elettrodo, che serve appunto da anodo nel processo di esaurimento, mentre si ha cura di mantenere isolato l'anticatodo.

Sul gas che viene emesso dagli elettrodi, sono già state fatte alcune interessanti ricerche. Lo Skinner (1) ha per es. osservato che il gas che si svolge dal catodo, formato di metalli differenti, è idrogeno; ed ha dimostrato che l'emissione di questo gas dal catodo è accompagnata da un assorbimento che si produce all'anodo; ed ha anche trovato che questa emissione riprende, lasciando per qualche tempo gli elettrodi in riposo: il che indica la grande difficoltà incontrata dal gas occluso per portarsi dagli strati più profondi alla superficie. Nello stesso modo osservò l'emissione e l'assorbimento dell'azoto da catodi ed anodi formati da dischetti di carbone. Le sue esperienze vennero però eseguite a pressioni tra 1 e 3 mm. di mercurio e con la scarica a forma di fiocco. Esperienze analoghe per l'assorbimento dell'idrogeno e dell'azoto da parte di anodi diversi per il passaggio delle scariche furono fatte dal Chrisler (2), sempre con pressioni del gas superiori a 2 mm. di mercurio. Altre ricerche sui gas occlusi nelle pareti di vetro dei tubi a vuoto furono fatte dallo Swinton e dal Pohl (3).

Particolarmente degne di nota sono le ricerche di Hirsch e Soddy (4) sul gas che alle rarefazioni, alle quali avviene la emissione dei raggi X, viene dato dagli elettrodi di alluminio: gas, la cui formazione essi ritengono connessa con la presenza di tracce di sodio negli elettrodi e di cui la natura non è ben precisata.

D'altra parte, il fatto che i tubi del Röntgen, per il loro uso continuato, tendono ad indurirsi, sta a dimostrare che gli elettrodi devono riassorbire il gas contenuto nell'ampolla, ed è pure noto che in certe condizioni si può ottenere con le scariche una autorarefazione del tubo, la quale può raggiungere limiti elevatissimi.

Ciò posto, è manifesto che molti punti restano ancora da chiarire su questo argomento: resta così da chiarire come proceda l'emissione del gas con le scariche durante il periodo di esaurimento dei tubi Röntgen; come vi influisca l'innalzamento della temperatura; come, quando l'esaurimento è sufficientemente progredito, avvenga il fenomeno inverso dell'autorarefazione del tubo, e come si raggiungano quelle condizioni di grande stabilità che presentano i tubi forniti dalle fabbriche. Vi è inoltre da approfondire lo studio di quel gas che in determinate condizioni viene emesso dagli elettrodi e in altre riassorbito.

(1) Physikalische Zeitschrift, 1905, pag. 610; e Philosophical Magazine, 1906, pag. 481.

(2) Physikalische Zeitschrift, 1909, pag. 746.

(3) Beiblätter zu den Annalen der Physik, vol. 33, an. 1909, pag. 1382.

(4) Philosophical Magazine, 1907, pag. 779.

Lo scopo delle presenti ricerche è quello di portare un nuovo contributo alla risoluzione di tali questioni estremamente complesse, in modo da poter chiarire i fenomeni che avvengono nelle estreme rarefazioni dei tubi del Röntgen e conoscere le condizioni necessarie per il loro migliore funzionamento: esse però non costituiscono se non uno studio preliminare per poter in seguito stabilire le condizioni interne del tubo dalle quali dipende l'emissione dei raggi x, in particolar modo in rapporto alla pressione, perchè quelle da me pubblicate nel 1904 riguardavano il caso di tubi non esauriti, nei quali per ciò la scarica doveva esser accompagnata da un'abbondante emissione dei gas residui.

Evidentemente, per raggiungere lo scopo propostomi, le ricerche dovevano esser rivolte da una parte alla misura delle pressioni del gas contenuto nel tubo attraversato dalle scariche, e dall'altra alla misura della ionizzazione prodotta.

I tubi adoperati provenivano da fabbriche tedesche: dopo aver sperimentato il loro perfetto funzionamento, sia radioscopicamente sia per la ionizzazione che producevano, essi venivano aperti e subito saldati ad un tubo di vetro che conduceva ad una provetta di Mach Leod e alla pompa Gaede. Ho fatto uso di tubi di diametri diversi, muniti sempre di anticatodo di platino: il catodo e l'anodo erano, al solito, di alluminio. Un rubinetto normale, tipo Leybold, a perfetta tenuta, era inserito tra il tubo Röntgen e il manometro: un secondo rubinetto identico era invece inserito tra il manometro e la pompa Gaede. Nel tubo di vetro di comunicazione tra il manometro e questo secondo rubinetto ho inoltre saldato un tubo Geissler senza elettrodi, per analizzare per mezzo di uno spettroscopio il gas contenuto: due larghe striscie di stagnola, incollate esternamente nelle parti più larghe del tubo Geissler, servivano per rendere luminoso il gas contenutovi, collegandole con i poli di un rocchetto.

Il tubo Röntgen era disposto orizzontale, e la comunicazione col manometro partiva dal tubo laterale adiacente al catodo ed era rivolta verso l'alto.

Siccome per esaurire il tubo dal gas occluso si doveva riscaldarlo a temperatura elevata, esso era appoggiato sulle parti opportunamente ripiegate di due bacchette di vetro le quali erano superiormente fissate a robusti sostegni. Con questa disposizione era facile di circondare dal basso il tubo Röntgen con una scatola di amianto e chiudere questa scatola con un coperchio, pure di amianto, che doveva naturalmente portare delle fenditure in corrispondenza delle bacchette di vetro che reggevano il tubo medesimo e del tubo di vetro che stabiliva la comunicazione col manometro: una serie di 10 fiamme sottostanti permetteva di raggiungere una temperatura di oltre 300°.

La pompa Gaede comunicava a sua volta con una pompa ad olio Gerik; e nel tubo di comunicazione era inserito un rubinetto a tre vie, per poter

introdurre nella pompa Gaede, nel manometro e nel tubo Röntgen. gas differenti.

Per misurare la ionizzazione prodotta dai raggi X, ho disposto il tubo Röntgen in modo che l'emissione avvenisse in direzione di una finestra rettangolare praticata in una spessa parete. Questa finestra era chiusa da una lastra di piombo che portava un'apertura circolare di 9 cm. di diametro: l'anticatodo del tubo distava 22 cm. da questa apertura; la disposizione era tale che il centro dell'anticatodo e il centro dell'apertura si trovavano sulla stessa retta orizzontale. L'apertura della lastra di piombo era protetta da una sottilissima lastra di alluminio, che ne distava circa 2 mm., accuratamente isolata con supporti di ebanite e mantenuta costantemente carica da 400 elementi Volta: un elettrometro di Exner e Geitel indicava il buon funzionamento di questa pila.

Nel vano della parete, e ad una distanza di 1 cm. dalla lastrina di alluminio, era collocato un disco di rame annerito, di diametro un po' maggiore dell'apertura esistente nella lastra di piombo, accuratamente isolato e comunicante con l'ago di un elettrometro del Mascart. Questo elettrometro, appoggiato sopra un piano coperto da lastra di zinco, si trovava dunque nella stanza attigua a quella del tubo Röntgen: sullo stesso piano si trovavano le cassette di pile per la carica dei quadranti, una pila campione con uno dei poli isolati, e un interruttore. Una grande cassa di legno tappezzata di stagnola, senza fondo ed aperta dal lato che si addossava alla parete, copriva l'elettrometro, le cassette delle pile di carica, la pila campione e l'interruttore: e poichè anche il vano della parete, a partire dalla lastra di piombo, ed il tratto di muro, a cui si addossava la cassa di legno, erano pure tappezzati di stagnola, è chiaro che tutti questi apparecchi venivano a trovarsi protetti da ogni azione elettrostatica.

L'interruttore, che si manovrava dall'esterno, permetteva o di stabilire la comunicazione dell'ago dell'elettrometro col suolo, o di isolarlo, o di farlo comunicare col polo isolato della pila campione: quest'ultima serviva per controllare le condizioni di sensibilità dell'elettrometro. Un'apertura praticata nella cassa di legno lasciava visibile lo specchietto dell'ago dell'elettrometro, le cui deviazioni si leggevano con cannocchiale a scala.

Gli elettrodi del tubo comunicavano con i poli di un rocchetto di circa 15 cm. di scintilla con interruttore rotante: ho avuto sempre cura che il motore dell'interruttore ruotasse con velocità costante. L'intensità della corrente primaria, fornita da accumulatori, si misurava prima e dopo di ogni serie: essa si mantenne quasi sempre eguale ad 8 ampères. Volendo procedere ad una misura di ionizzazione, si isolava il sistema formato dall'ago dell'elettrometro e dal disco annerito, e si faceva agire il rocchetto o per 2 o per 5 secondi, ovvero si lasciava isolato l'elettrometro finchè raggiungeva la posizione di equilibrio: indi si leggeva la deviazione ottenuta per la ca-

rica portata per la ionizzazione dell'aria dalla lamina di alluminio sul disco di rame.

Nella provetta del Mac Leod, l'ampolla ed il cannello avevano la capacità complessiva di 12,000 mm.^{3}: il cannello aveva la sezione di 1 mm.^{2} e la graduazione in mm. Le misure si facevano in modo che il mercurio nel ramo esterno arrivasse al livello dello zero del cannello graduato, e leggendo la divisione alla quale arrivava il mercurio dentro il cannello medesimo: così che questo numero w di divisioni rappresentava nello stesso tempo il dislivello in mm. tra i due rami della provetta, e il numero dei mm^3. ai quali era ridotto il volume del gas inizialmente contenuto nell'ampolla; la pressione del gas nel tubo si aveva così a meno di una differenza trascurabile, dividendo w^2 per 12000.

L'apparecchio, naturalmente, teneva il vuoto in modo perfetto; chiuso il rubinetto tra il manometro e la pompa Gaede, la pressione rimaneva immutata anche dopo parecchi giorni: la qual cosa stava a dimostrare un fatto già noto, che, cioè, anche alle estreme rarefazioni i gas occlusi negli elettrodi non si sprigionano spontaneamente alla temperatura ordinaria: d'altra parte però non si è mai osservato, nemmeno quando i tubi erano esauriti, alcun assorbimento spontaneo dei gas da parte degli elettrodi: non essendovi dunque nè spontanea emissione nè spontaneo assorbimento è chiaro che per questo riguardo le condizioni dei tubi dovevano rimanere immutate.

Una precauzione assolutamente indispensabile per ottenere l'esaurimento dei tubi, è quella di impedire che una parte della scarica arrivi a propagarsi al manometro ed alla pompa, perchè in tal caso si sprigionano, molto probabilmente nella superficie di contatto tra vetro e mercurio, dei gas che mascherano completamente i fenomeni che avvengono nel tubo. In alcune esperienze preliminari — nelle quali adoperavo le scariche impulsive di una batteria di condensatori, in luogo di quelle del rocchetto — i rubinetti facilmente si foravano, mentre, se resistevano, la scarica passava tra le due superfici di vetro del rubinetto combacianti ed insieme con questo passaggio della scarica si vedeva la pressione aumentare, non ostante che i rubinetti lasciati a sè, tenessero ancora perfettamente il vuoto. Se non si elimina questa propagazione di una parte della scarica dal tubo al manometro e alla pompa, non è possibile di ottenere l'esaurimento degli elettrodi, che nelle prime esperienze, non ostante tutte le precauzioni prese, sembravano per ciò inesauribili.

Le cose cambiarono completamente quando pensai di avvolgere di stagnola un buon tratto del tubo di comunicazione tra il tubo Röntgen ed il manometro, in prossimità del tubo Röntgen medesimo, stabilendo poi una buona comunicazione di questa stagnola col suolo. Con questo artificio la parte di scarica, che tendeva a propagarsi al manometro, veniva arrestata

al luogo rivestito dalla stagnola, così che tutto il rimanente dell'apparecchio restava escluso da ogni azione elettrica: eliminata così questa gravissima causa di errore, i fenomeni di emissione e di assorbimento del gas da parte degli elettrodi presero una grande regolarità, che mi permise di compiere lo studio propostomi.

Non essendo qui possibile di riportare tutte le serie di misure fatte, anche se volessi limitarmi a quelle riferentisi all'esaurimento di un solo dei tubi sperimentati, mi limiterò a riferirne alcune che, opportunamente scelte, daranno una chiara idea del modo come il processo si svolge. Naturalmente questi fenomeni di emissione e di assorbimento dipendono essenzialmente dalla natura degli elettrodi: anzi si può dire che ogni tubo abbia un comportamento proprio, così che mentre qualche tubo dava fin da principio delle emissioni di gas notevolissime, qualche altro dava una emissione relativamente scarsa. Ciò non poteva dipendere che dal modo stesso con cui era stato preparato l'alluminio che serviva per gli elettrodi. I risultati in seguito riferiti furono ottenuti con un tubo che ha dato tra le più abbondanti emissioni del gas accluso.

Nei seguenti prospetti, nella colonna indicata con la lettera t sono riportati i minuti primi per i quali si è fatto funzionare il rocchetto; in quella indicata con la lettera w, il numero delle divisioni lette al manometro; in quella indicata con P, i valori di w^2, proporzionali alla pressione, il cui vero valore si otterrebbe dividendo, come si disse, w^2 per 12000; in quella indicata con Δ, il rapporto tra l'incremento o il decremento dei valori di P osservato, e il numero dei minuti durante il quale esso si è verificato.

L'anticatodo venne unito al catodo soltanto quando si procedeva a misure di ionizzazione per conoscere l'andamento della emissione dei raggi X: e ciò per non annerire con le scariche il tubo, cosa che avveniva rapidamente se si teneva l'anticatodo unito al catodo per la facile polverizzazione del platino specialmente a temperature elevate. Durante poi le serie di misure che si andavano facendo per la pressione, si manteneva costantemente chiuso il rubinetto adiacente alla pompa Gaede, così che quest'ultima restava esclusa, ed il gas che si sprigionava dagli elettrodi occupava un volume costante.

	Serie I			Serie II			Serie III			Serie IV			Serie V			Serie VI			Serie VII			Serie VIII			Serie IX		
t	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*	*w*	P	*Δ*
0	36,0	1296		38,0	1444		31,5	992		37,4	1399		13,0	169		23,5	552		6,0	36		18.3	335		37,0	1369	
			1234			1056			377			487			50			108			364			49			280
1	50,3	2530		50,0	2500		37,0	1369		30,2	912		14,8	219		25,7	660		20,0	400		19,6	384		35,0	1089	
			417			562			119			131			25			48			256			25			114
3	58,0	3364		60,2	3624		40,1	1608		25,5	650		16,4	269		27,5	756		30,2	912		20,8	433		29,0	861	
			209			313			78			56			8			14			210			12			61
5	61,5	3782		65,2	4251		42,0	1764		23,2	538		16,9	286		28,0	784		36.5	1332		21.4	458		27,2	740	
			123			218			34			34			4			9			90			8			33
10	66,3	4396		73,0	5329		44,0	1936		19,2	369		17,5	306		28,8	829		42.2	1781		22,3	497		24,0	576	
			62			110			20			14			1,4			1,2			43			1,4			5
20	70,8	5013		80,2	6432		46,2	2134		15,0	225		17,9	320		29,0	841		47,0	2209		22,6	511		23,0	529	
			27			62			9			3			0			0			14			0,4			1,5
30	72,7	5285		84,0	7056		47,1	2218		14,0	196		17,9	320		29,0	841		48,5	2352		22,7	515		22,7	515	
			15			43			4			0,5			0			0			2			0			0
50	74,8	5595		89,0	7921		47,6	2266		13,6	185		17.9	320		29.0	841		49,0	2401		22.7	515		22.7	515	
			10			23			0			0,4									0						
75	76,4	5837		92,2	8501		47,6	2266		13,2	174								49,0	2401							
			4			13						0,2									0						
100	77,0	5929		94,0	8836					13,0	169								49.0	2401							

La prima serie riportata, eseguita alla temperatura ordinaria poche ore dopo che il tubo Röntgen era stato saldato al tubo di comunicazione del manometro e della pompa, mostra in modo evidente che per il passaggio delle scariche del rocchetto si svolge dagli elettrodi di alluminio una notevole quantità di gas, così che la pressione è salita, in 75′, da 1296 (pari a 0.108 mm. di Hg.) a 5837 (pari a 0.486 mm. di Hg.): ma l'emissione va rapidamente diminuendo col crescere della pressione; e tende verso un valore limite, oltre il quale la emissione si arresta. A questa pressione esiste dunque uno stato di equilibrio tra il gas esterno e quello occluso in prossimità della superficie degli elettrodi: essa può servire come indice del progressivo esaurimento del tubo Röntgen, essendo manifesto che, per avere il tubo stabile, si deve raggiungere quella condizione di cose per la quale pressione di equilibrio debba essere proprio quella corrispondente alla massima emissione dei raggi X.

La seconda serie riportata è stata eseguita due giorni dopo, durante i quali si è proseguito il processo di esaurimento del tubo: a questo scopo, il tubo venne portato, durante questi due giorni e per alcune ore, a 200°, aiutando l'emissione del gas occluso negli elettrodi, e che avveniva spontaneamente per l'elevata temperatura, sia mandando di tanto in tanto le scariche del rocchetto, sia facendo funzionare la pompa in modo che la pressione rimanesse sufficientemente bassa (circa 0,09 mm. di Hg.). Dai valori riportati si vede che per il passaggio delle scariche la pressione è salita, nello stesso tempo di 75′, da 1444 (pari a 0,095 mm. di Hg.) ad 8501 (pari a 0.705 mm. di Hg.), dimostrandosi, così, che alla temperatura di 200° l'emissione del gas da parte degli elettrodi provocata dalle scariche è stata notevolmente superiore a quella ottenuta nella I^{a} serie a temperatura ordinaria, non ostante la notevole quantità di gas già eliminata nei due giorni precedenti. Questa seconda serie è molto interessante, perchè dimostra quale importanza abbia l'elevata temperatura nel conseguire un rapido esaurimento degli elettrodi del tubo.

La terza serie è stata eseguita il giorno successivo, mentre il tubo si trovava alla temperatura pure di 200°. Tra la seconda e terza serie si era proseguito il processo di esaurimento, mantenendo il tubo per diverse ore a 200°, mandando di tanto in tanto le scariche e mantenendo la pressione sufficientemente bassa. Come risulta dai valori riportati, la pressione sale, nel solito tempo di 75′, per l'azione delle scariche soltanto da 992 (pari a 0.083 mm. di Hg.) a 2266 (pari a 0.189 mm. di Hg.), dimostrando, col confronto della 2^{a} serie, che il processo di esaurimento degli elettrodi aveva già fatto sensibile progresso.

La quarta serie è di particolare interesse: essa venne fatta due giorni dopo la precedente, essendosi proseguito durante i medesimi il processo di esaurimento degli elettrodi. Dopo aver portato il tubo a 200°, e dopo averlo

tenuto per parecchie ore alla maggiore rarefazione possibile per il funzionamento della pompa, si escluse la pompa e si attese che la pressione del gas uscito dagli elettrodi sotto l'azione dell'elevata temperatura e con l'aiuto delle scariche del rocchetto, salisse ad un valore di circa 2500: indi si spensero le fiamme e, tolto l'involucro, si portò il tubo rapidamente alla temperatura ordinaria. La pressione del gas si ridusse per il raffreddamento, a 1399 (pari a 0.117 mm. di Hg.). Fatto in seguito funzionare nuovamente il rocchetto, si sono eseguite le misure che sono riportate nella serie IV. Questa serie dimostra che gli elettrodi riassorbono, alla temperatura ordinaria e sotto l'azione delle scariche il gas che, sotto l'azione delle scariche, avevano emesso a temperatura elevata, dando origine ad una rarefazione del tubo la quale raggiunse pressioni molto basse, cioè il valore di 169 (pari a 0.014 mm. di Hg); pressione alla quale si era già oltrepassata la massima emissione dei raggi X, ed il tubo si mostrava così indurito da non lasciare quasi più passare la scarica.

La quinta serie riportata fu eseguita nel giorno successivo: ed è pure importante, perchè dimostra che, dopo parecchie ore di riposo, gli elettrodi del tubo tornano ad emettere, sempre per azione delle scariche, del nuovo gas, il quale evidentemente non può che provenire dai più profondi strati di essi. Questa emissione si accentua se il riposo del tubo si prolunga, come lo dimostra la serie sesta fatta due giorni dopo la quinta: è omessa per brevità la serie fatta nel giorno intermedio, e nella quale la pressione era salita, da 320, a 522. Se però si confronta la serie sesta con la prima, risulta manifesto quale progresso sia stato fatto nell'esaurimento degli elettrodi del tubo e come questo esaurimento proceda regolarmente.

La serie VII fu fatta alla temperatura di 300°, cioè a temperatura molto più elevata delle precedenti. Essa dimostra come, anche quando gli elettrodi sembrano sufficientemente esauriti alla temperatura ordinaria, emettono ancora abbondante quantità di gas, a temperatura elevata: ma se si confronta questa serie ultima con le precedenti fatte a 200°, si vede come per il solo fatto di aver portato il tubo a temperatura più elevata di quelle prima adoperate, si accentui notevolmente l'emissione del gas dagli elettrodi: la pressione infatti è salita, in 75′, da 26 (pari a 0.003 mm. di Hg.) a 2401 (pari a 0,2 mm. di Hg.).

L'ottava e nona serie riportate servono a dimostrare che in ogni particolare condizione di esaurimento degli elettrodi vi è una pressione per la quale si stabilisce l'equilibrio tra il gas in essi contenuto e il gas interno. La serie ottava è una serie di emissione alla temperatura ordinaria, fatta dopo che il tubo era rimasto in riposo per molte ore: e si vede che la pressione sale lentamente per l'azione delle scariche, così che in 50′ si passa dal valore di 335 (pari a 0.028 mm. di Hg.) a 515 (pari a 0,043 mm. di Hg.). Riscaldato subito dopo il tubo a 280°, e aiutata l'emissione del gas

con le scariche fino a raggiungere il valore di 2500. lasciando naturalmente esclusa la pompa. si è in seguito ricondotto rapidamente il tubo alla temperatura ordinaria, alla quale la pressione si trovò ridotta. per il raffreddamento. a 1369 (pari a 0,114 mm. di Hg.). La serie nona mostra come siasi compiuto l'assorbimento del gas emesso: e si vede che la pressione. alla quale l'assorbimento si arresta. è precisamente quella di 515, alla quale si era anche arrestata la emissione del gas nella serie precedente.

Dal complesso di tutte le serie fatte si può dunque concludere:

1°) che gli elettrodi di alluminio dei tubi Röntgen. dopo essere stati in contatto con l'aria atmosferica. contengono occlusa una notevole quantità di gas che non si sprigiona spontaneamente alla temperatura ordinaria neppure nelle rarefazioni più spinte. ma che invece viene emessa per il passaggio delle scariche;

2°) che l'emissione del gas avviene spontaneamente a temperature elevate. ma anche in questo caso viene notevolmente facilitata per il passaggio delle scariche: e la quantità di gas che si sprigiona è tanto più notvole quanto più elevata è la temperatura;

3°) che il gas occluso incontra grandissima difficoltà per raggiungere la superficie degli elettrodi. anche a temperature elevate e a rarefazioni molto spinte;

4°) che in seguito a queste difficoltà gli elettrodi possono esaurirsi superficialmente in modo che la pressione rimanga stabile al passaggio della scarica anche per qualche giorno. finchè, cioè. il gas occluso negli strati più profondi non compensi. venendo alla superficie, l'esaurimento prodotto: raggiunta questa condizione. ricomincia per il passaggio delle scariche la emissione del gas:

5°) che ottenuto l'esaurimento superficiale. gli elettrodi riassorbono, sotto l'azione delle scariche e a temperatura ordinaria. il gas che sotto l'azione delle scariche avevano emesso a temperature elevate;

6°) che l'emissione e l'assorbimento dipendono dalle particolari condizioni di esaurimento nelle quali si trovano gli strati superficiali degli elettrodi.

Affinchè dunque un tubo diventi stabile per l'emissione dei raggi X. è necessario che il gas occluso in tutta la massa degli elettrodi sia in equilibrio permanente, anche quando il tubo è attraversato dalle scariche. col gas esterno e per quella pressione per la quale ha luogo la massima emissione dei raggi X medesimi: ed è appunto il conseguimento di questo stato di equilibrio del gas occluso in tutta la massa degli elettrodi col gas esterno alla pressione corrispondente al massimo dei raggi X. che costituisce, data la estrema difficoltà del gas di muoversi nell'interno degli elettrodi, l'operazione più lunga per la costruzione di un tubo Röntgen.

Se gli elettrodi non sono sufficientemente esauriti, il gas occluso negli strati più profondi raggiunse lentamente la superficie, e, per il passaggio delle scariche, lentamente si sprigiona: il tubo, che sembrava fatto, si rammolisce perchè lo stato di equilibrio ha luogo per una pressione superiore a quella per la quale la produzione dei raggi X è massima, rendendosi in tal modo inservibile. Se invece gli elettrodi sono troppo esauriti, il gas esterno viene lentamente occluso, e il tubo si indurisce non lasciando più passare la scarica rendendosi, in tal modo, per un altro verso inservibile.

La legge con la quale avviene la emissione e l'assorbimento del gas da parte degli elettrodi, è di natura esponenziale, come si riconosce facilmente portando i valori del tempo sulle ascisse, e quelli delle pressioni sulle ordinate, in una rappresentazione grafica su carta millimetrata.

L'emissione si compie sensibilmente con una legge della seguente forma:

$$P - B = (A - B)\ (1 - 10^{-bt})\ ,$$

dove b è una costante dipendente dalle unità di misura scelte e dalle condizioni del tubo, B il valore della pressione iniziale al tempo $t = o$, ed A il valore della pressione finale per $t = \infty$.

Similmente, l'assorbimento si compie con una legge della seguente forma:

$$P - A = (B - A)\ 10^{-bt},$$

dove ancora b è una costante dipendente dalle unità di misura scelte e dalle condizioni del tubo, B il valore della pressione iniziale al tempo $t = o$, ed A il valore della pressione finale per $t = \infty$.

Stabilito così l'andamento generale dei fenomeni che si compiono negli ordinarî tubi Röntgen per quanto riguarda l'emissione e l'assorbimento del gas che si sprigiona dagli elettrodi di alluminio, ho creduto conveniente di esaminare come si comportasse l'aria sostituita nelle identiche condizioni al gas svolto dagli elettrodi di alluminio, e ciò allo scopo di stabilisce se il gas emesso dagli elettrodi di alluminio fosse appunto aria dai medesimi occlusa, ovvero fosse un gas differente.

Che il gas emesso dagli elettrodi fosse diverso dall'aria, appariva invero manifesto dall'aspetto stesso del tubo attraversato dalle scariche: è noto, infatti, che, se la scarica passa in un tubo contenente aria, la luce che invade il tubo, prima di raggiungere lo stato di emissione dei raggi X, è di colore rosa purpureo: invece la luce che si osservava nelle stesse condizioni quando la scarica attraversava il gas emesso dagli elettrodi, era del tutto diversa, e precisamente di un colore bianco azzurrognolo.

Per risolvere la questione, subito dopo la serie IV, già sopra riportata (serie che riguarda l'assorbimento, da parte degli elettrodi, del gas emesso dagli elettrodi medesimi), feci nel tubo, con la pompa Gaede, la massima

rarefazione possibile $\frac{1}{12000}$ di mm. di mercurio, e introdussi nel tubo una piccola quantità di aria ben secca, alla pressione iniziale di 3136, pari a 0,261 mm. di mercurio. Indi, esclusa la pompa, ho fatto una serie con le scariche. Nel seguente prospetto trovansi riportate, per maggiore chiarezza, la serie IV di assorbimento del gas emesso dagli elettrodi, e la serie dell'assorbimento dell'aria.

	Serie IV			Serie X		
t	*w*	P		*w*	P	
0	37,4	1399	487	56,0	3136	484
1	30,2	912	131	51,5	2652	26
3	25,5	650	56	51,0	2601	0
5	23,2	538	34	51,0	2601	6
10	19,2	369	9	50,7	2570	7,5
30	14,0	196	0,5	49,2	2421	8,2
50	13,6	185	0,4	47,5	2256	7,1
75	13,2	174	0,2	45,6	2079	8,2
100	13,0	169		43,3	1875	7,1
125				41,2	1697	7,4
150				38,9	1513	7,8
175				36,3	1318	7,6
200				33,6	1129	7,5
225				30,7	942	7,6
250				27,4	751	5,8
275				24,6	605	4,8
300				22,0	484	4,9
325				19,0	361	4,2
350				16,0	256	2,4
375				14,0	196	0,2
400				13,8	190	

La differenza tra il comportamento del gas emesso e quello dell'aria è evidente. Da prima l'aria subisce una brusca contrazione di volume, così che la pressione scende rapidamente, dal valore iniziale di 3136 (pari a 0.261 mm. di mercurio), al valore di 2601 (pari a 0,217 mm. di mercurio), indicando che sotto l'azione delle scariche l'ossigeno si combina con parte dell'azoto per dare origine a qualcuno degli ossidi dell'azoto: anche il colore della scarica in questi primi momenti subisce una profonda modificazione. Dopo, la pressione diminuisce proporzionalmente al tempo e, quindi, alla quantità di elettricità che attraversa il tubo: l'autorarefazione non avviene più con la legge prima stabilita, dimostrando che gli elementi dell'aria non vengono occlusi dagli elettrodi, come avveniva per il gas emesso, ma l'autorarefazione avviene con un processo differente, che probabilmente consisterà in un processo di combinazione chimica degli elementi stessi con gli elettrodi di alluminio.

I numeri riportati dimostrano, poi, che l'autorarefazione del tubo procede regolarmente, e solo a pressioni molto basse essa si compie più lentamente

sino a raggiungere un limite al quale si arresta: nel caso della serie riferita, la pressione minima raggiunta è di 190 (pari a 0,0158 mm. di mercurio), pressione alla quale ricomincerebbe l'emissione del gas che si sprigiona dagli elettrodi e che nel caso attuale era anche inferiore a quella per la quale si aveva la massima emissione dei raggi X.

Ad avvalorare questa interpretazione, che gli elementi dell'aria siano stati fissati e non assorbiti dagli elettrodi, sta il fatto che, riscaldando nuovamente il tubo ad alta temperatura e mandandovi le scariche, ciò che torna a liberarsi dagli elettrodi più non è aria ma il solito gas: la qual cosa ho potuto facilmente riconoscere dall'esame spettroscopico fatto per mezzo del tubo di Geissler unito al manometro. Nè poteva esservi dubbio di sorta, perchè lo spettro del gas che si sprigiona dagli elettrodi è costituito da poche righe che corrispondono alle seguenti lunghezze d'onda:

$$\lambda = 656{,}3 \; ; \; 606 \; ; \; 578 \; ; \; 558 \; ; \; 545 \; ; \; 515 \; ; \; 484 \; .$$

Delle azioni chimiche che si compiono sotto l'azione delle scariche tra gli elettrodi di alluminio ed il gas esterno dando luogo ad autorarefazioni del tubo che possono raggiungere pressioni estremamente basse, avrò modo di riferire in un'altra occasione: qui mi basta affermare che il gas che si sprigiona dagli elettrodi si comporta molto diversamente dell'aria.

Ma una ancor più notevole differenza tra il comportamento del gas occluso dagli elettrodi e il comportamento dell'aria, si ha dall'esame della emissione dei raggi X.

Riporto qui due delle serie fatte con gli elettrodi, quasi esauriti completamente, nelle seguenti condizioni: dopo avere riscaldato il tubo a più che 300° per alcune ore, ed aver aiutato l'emissione del gas residuo ancora contenuto negli elettrodi con le scariche, si è lasciato raffreddare rapidamente il tubo medesimo togliendone l'involucro di amianto. La pressione del tubo si trovò così portata a 1024 (pari a 0,085 mm. di Hg.). Indi, alla temperatura ordinaria, si mandarono nuovamente le scariche del rocchetto, avendo riunito l'anodo all'anticatodo. Il gas veniva, al solito, assorbito e la pressione decresceva; nello stesso tempo si misurava all'elettrometro la massima deviazione che esso presentava tenendo l'ago isolato mentre il rocchetto funzionava: questa deviazione misurava la ionizzazione prodotta dai raggi X emessi dal tubo.

Questa serie di misure è riportata nel seguente specchietto: nella prima colonna, indicata con w, si trovano i numeri letti nella provetta di Mac Leod; nella seconda, i valori di $P = w^2$ proporzionali alle pressioni: nella terza la deviazione Δ osservata all'elettrometro.

Subito dopo terminata questa serie, si è fatto il massimo vuoto con la pompa Gaede, e si mandò nell'apparecchio una piccola quantità di aria secca, regolando le cose in modo che la pressione dell'aria fosse inizialmente la

stessa di quella della serie precedente, e cioè 1024. La seconda serie riportata contiene appunto i valori w, di P e di Δ ottenuti con l'aria.

Serie I			Serie II		
w	P	Δ	w	P	Δ
32,0	1024	0	32,0	1024	0
30,8	949	0	27,2	740	0
29,6	876	34	23,0	529	0
28,0	784	126	19,0	361	46
26,8	718	182	18,0	324	126
25,5	650	240	16,8	282	229
24,2	586	286	15,8	250	294
23,5	552	306	14,8	219	332
22,0	484	340	14,1	199	350
21,0	441	350	12,7	161	300
20,2	408	356	12,2	149	180
19,4	376	346			
18,8	353	310			
18,0	334	200			

Dall'esame delle due serie si vede che l'andamento dei fenomeni è nei due casi lo stesso: i raggi X cominciano ad una determinata pressione, raggiungono un massimo, indi la loro intensità ritorna rapidamente a zero col diminuire della pressione perchè la scarica non attraversa più il tubo. Ma esiste una notevole differenza nei valori ottenuti nei due casi: quando cioè nel tubo si trova il gas emesso dagli elettrodi, i raggi X cominciano ad una pressione sufficientemente elevata, di circa 900 (pari a 0,075 mm. di Hg.); in seguito la loro emissione diventa più abbondante sino a raggiungere il massimo per una pressione di circa 400 (pari a 0,033 mm. di Hg.); indi rapidamente decresce, e, ad una pressione di circa 300 (pari a 0,025 mm. di Hg.), il tubo si spegne. Invece, con l'aria, l'emissione dei raggi X comincia ad una pressione molto inferiore, e cioè a 400 circa (pari a 0,033 mm. di Hg); aumenta con molta rapidità e raggiunge lo stesso valor massimo di prima per la pressione di circa 200 (pari a 0,017 mm. di Hg.); indi, pure molto rapidamente, diminuisce, e alla pressione di circa 130 (pari a 0,011 mm. di Hg.) la scarica non attraversa più il tubo.

Quel gas che così difficilmente si svolge dagli elettrodi e che rende così lungo il loro esaurimento sino a raggiungere quelle tali condizioni che rendono stabile il tubo per la massima emissione dei raggi X, si presenta

adunque, sia per lo spettro che fornisce, sia per il modo come viene riassorbito dagli elettrodi, sia per quanto riguarda il suo comportamento per la emissione dei raggi X, completamente diverso dall'aria.

Che cosa sia questo gas, se cioè esso sia uno degli ossidi dell'azoto proveniente per il diverso assorbimento da parte degli elettrodi dei due gas principali contenuti nell'aria, ovvero sia un gas alla cui formazione prenda parte qualche altro elemento contenuto come impurezza nell'alluminio non mi è possibile precisare non avendo potuto approfondire la ricerca spettroscopica: le osservazioni finora fatte non mi forniscono indicazioni sufficienti per un giudizio sicuro: ma su questo intendo compiere ulteriori esperienze.

Le due ultime serie riferite dimostrano ancora quale importanza abbia sulla pressione di massima emissione dei raggi X, ed in generale su tutto l'andamento dell'emissione dei raggi medesimi, la diversa natura del gas contenuto. Dal complesso però di tutte le serie fatte durante il processo di esaurimento del tubo, ho riconosciuto che le curve di emissione dei raggi X con la pressione variano continuamente e dipendono essenzialmente dalle condizioni superficiali degli elettrodi dai quali la scarica si diparte; solo ad esaurimento quasi compiuto la legge di emissione dei raggi X si presenta costante, così che i raggi X cominciano sempre alla stessa pressione che è pure costante: ma anche di questi fenomeni, che escono dai limiti di questa Nota, e che sono molto complessi, mi riserbo di riferire prossimamente.

Matematica. — *Sopra un sistema di equazioni algebriche.* Nota di A. Cecconi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In certe questioni di Statistica si presenta talvolta il problema che con linguaggio matematico si può esprimere nel modo seguente:

Dato un sistema di $m \,.\, n$ numeri reali a_{rs} disposti in righe ed in colonne, formanti cioè una matrice rettangolare, determinare $m + n$ quantità pure reali, $x_1 , x_2 , \ldots , x_m$; $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$, per modo che valgano le eguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{cases} x \sum_1^n{}_r a_{ir} y_r = A_i & (i = 1 , 2 , \ldots , m) \\ y_j \sum_1^m{}_s a_{sj} x_s = B_j & (j = 1 , 2 , \ldots , n) \end{cases}$$

nelle quali, A_i e B_j sono numeri assegnati tutti diversi da zero e legati dalla relazione

$$\sum_1^m{}_r A_r = \sum_1^n{}_s B_s = D .$$

Concettualmente la questione è esaurita, essendo ricondotta alla discussione

di un sistema di equazioni algebriche (di 2° grado), se non che i metodi generali di eliminazione sono in pratica inapplicabili. Era quindi necessaria la ricerca di un algoritmo che permettesse di calcolare, con quella approssimazione che più aggrada, almeno una soluzione del sistema di equazioni (1). Il metodo che andrò esponendo consente, sotto certe condizioni affatto restrittive per le applicazioni statistiche, il suddetto calcolo.

1. Conviene anzitutto osservare che, soddisfatte $n + m - 1$ equazioni, di necessità risulta soddisfatta anche la rimanente; e che, se

$$x_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$
$$x_j = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

è una soluzione, ponendo

$$x_i = \varrho \,.\, \alpha_i$$
$$y_j = \frac{1}{\varrho} \cdot \beta_j ,$$

ϱ designando un numero diverso da zero, si ottiene una nuova soluzione, che sarà però da riguardarsi come sostanzialmente coincidente con la prima. Inoltre, poichè per la natura stessa del sistema (1) non può alcuna delle α e delle β essere eguale a zero, si potrà sempre fare in modo, determinando opportunamente ϱ, che una delle incognite acquisti un valore arbitrariamente prefissato. Potremo quindi limitarci alla ricerca di quelle soluzioni per le quali è $y_n = 1$; e reciprocamente, assegnando una soluzione, supporre sempre ch'essa sia tale da attribuire all'incognita y_n il valore 1.

Nel seguito, una soluzione si dirà *uniforme*, se per essa tutte le incognite acquistano valori del medesimo segno.

2. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se i coefficienti a_{rs} e i termini noti A_i e B_j del sistema di equazioni (1) *sono tutti diversi da zero e del medesimo segno, esiste una, ed una sola, soluzione uniforme.*

Esistenza della soluzione uniforme. — Poniamo infatti:

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \cdots = y_{n-1}^{(0)} = 0 ,$$

e consideriamo, per $p = 1, 2, \dots$, le seguenti successioni:

$$(2) \qquad x_i^{(p)} = \frac{A_i}{\sum_1^{n-1} {}_s \, a_{is} \, y_s^{(p-1)} + a_{in}} \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(3) \qquad y_j^{(p)} = \frac{B_j}{\sum_1^{m} {}_r \, a_{rj} \, x_r^{(p)}} \qquad (j = 1, 2, \dots, n-1) ,$$

la legge di formazione delle quali è senz'altro manifesta dalla semplice ispezione dei secondi membri delle (2) e delle (3).

Si osservi, poi, che, essendo ogni $y_j^{(1)}$ diversa da zero, il denominatore di ciascuna $x_i^{(2)}$ è maggiore di quello della corrispondente $x_i^{(1)}$; perciò si ha:

$$x_i^{(1)} > x_i^{(2)} .$$

Ammesso ora come provato che, per ogni valore dell'indice i, sia

$$x_i^{(p-1)} > x_i^{(p)} ,$$

facilmente dimostreremo che vale una disuguaglianza analoga fra i termini $x_i^{(p)}$ e $x_i^{(p+1)}$. Infatti, basta notare, che per le (3), il denominatore di $y_j^{(p-1)}$ (j generico) supera quello del termine successivo $y_j^{(p)}$, e quindi è:

$$y_j^{(p-1)} < y_j^{(p)} ;$$

poichè allora, osservando che il denominatore di $x_i^{(p)}$ è minore di quello di $x_i^{(p+1)}$, ne scende subito che dev'essere

$$x_i^{(p)} > x_i^{(p+1)} .$$

Le $x_i^{(p)}$ costituiscono perciò m successioni decrescenti; e, conseguentemente, le $y_i^{(p)}$ rappresentano $n - 1$ successioni crescenti.

Ora si osservi che, se fra queste ultime ve ne fossero di divergenti, tutte le $x_i^{(p)}$ dovrebbero essere infinitesime. Ma poichè ciò è da escludersi, avendo sempre, per qualunque p,

$$\sum_1^m{}_r \, a_{rn} \, x_r^{(p)} > B_n \ (^1),$$

si dovrà concludere che ogni $y_j^{(p)}$ tende ad un limite finito che indicheremo con β_j.

(1) Infatti, poichè è $y_j^{(p)} > y_i^{(p-1)}$, dalle (2) si ricava:

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^m{}_s \, a_{sr} \, x_s^{(p)} \, y_r^{(p)} + \sum_1^m{}_r \, a_{rn} \, x_r^{(p)} > \sum_1^m{}_r \, A_r ;$$

e dalle (3):

$$\sum_1^{n-1}{}_s \sum_1^m{}_r \, a_{rs} \, x_r^{(p)} \, y_s^{(p)} = \sum_1^{n-1}{}_s \, B_s ,$$

donde, tenuta presente la relazione fra i termini noti A_i e B_j, scende:

$$\sum_1^m{}_r \, a_{rn} \, x_r^{(p)} > B_n .$$

Dalle (2) risulta allora, che le successioni $x_i^{(p)}$ convergono verso limiti positivi

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\sum_1^{n-1}{}_s a_{is}\beta_s + a_{in}} .$$

Se ne inferisce, passando al limite anche nelle (3), che, ponendo

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \\ y_j &= \beta_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n-1) \\ y_n &= 1 , \end{aligned}$$

si ottiene una soluzione uniforme del sistema di equazioni (1).

Unicità della soluzione. — Ammettiamo, ora, che esista un'altra soluzione uniforme:

$$\begin{aligned} x_i &= \mu_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \\ y_j &= \nu_j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) , \end{aligned}$$

e ricordiamo che, per quanto abbiamo detto sopra, possiamo supporre $\nu_n = 1$, e quindi μ_i e ν_j positivi.

Avendo noi assunti tutti eguali a zero i valori degli elementi $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \dots, y_{n-1}^{(0)}$, a norma delle (2) si avrà manifestamente:

$$x_i^{(1)} > \mu_i ;$$

e quindi, per le (3), anche

$$y_j^{(1)} < \beta_j .$$

Facendo ora un ragionamento induttivo analogo ad uno esposto precedentemente, possiamo provare che tutti i termini della successione $x_i^{(p)}$ sono maggiori di μ_i, e che ogni elemento della successione $y_j^{(p)}$ è minore di ν_j, donde scende che dev'essere

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_i \geq \mu_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \beta_j \leq \nu_j & (j = 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Ma dovendo valere l'identità

$$\sum_1^m{}_r a_{rn}(\alpha_r - \mu_r) = 0 ,$$

i segni di disuguaglianza delle (4) non possono sussistere, e perciò la seconda soluzione coincide con la prima

c. d. d.

Come ovvia conseguenza di quanto venne dimostrato, abbiamo:

Se i termini noti del sistema di equazioni (1) *hanno tutti il medesimo segno opposto a quello comune ai coefficienti, esiste una, ed una sola, soluzione per cui tutte le x assumono valori negativi mentre tut le y assumono valori positivi.*

3. Stabilita la esistenza e la unicità della soluzione uniforme, osserviamo che nelle successioni (2) le $x_i^{(1)}$ acquistano ordinatamente i valori $\frac{A_i}{a_{in}}$. Mutando questi, si può dubitare che le successioni generate dalle formole ricorrenti (2) e (3) conservino la convergenza. Perciò dimostriamo che:

Qualunque siano i valori positivi che si attribuiscono agli elementi $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$, *si ha sempre*

$$\lim_{p=\infty} x_i^{(p)} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\lim_{p=\infty} y_j^{(p)} = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Infatti, essendo $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dei numeri positivi qualunque, e posto

$$x_i^{(1)} = c_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

possiamo determinare m numeri h_i maggiori di -1, per modo che sia:

$$c_i = \alpha_i(1 + h_i).$$

Indichiamo con H un numero positivo arbitrario non minore del massimo degli h_i, ed analogamente con h un numero positivo minore di 1, ma, del resto, qualunque, purchè $-h$ non superi il minimo degli h_i. Necessariamente sarà

$$\alpha_i(1-h) \leq c_i \leq \alpha_i(1+H),$$

dalle quali, tenuto presente che è

$$y_j^{(1)} = \frac{B_j}{\sum_1^m {}_r\, a_{rj}\, c_r},$$

scendono le disuguaglianze

$$\frac{\beta_j}{1+H} \leq y_j^{(1)} \leq \frac{\beta_i}{1-h};$$

e posto

$$h_i^{(1)} = h\,\frac{A_i - a_{in}\alpha_i}{A_i - h a_{in}\alpha_i} \quad ; \quad H_i^{(1)} = H\,\frac{A_i - a_{in}\alpha_i}{A_i + H a_{in}\alpha_i},$$

con facili semplificazioni si ricava:

$$(4) \qquad \alpha_i(1 - h_i^{(1)}) \leq x_i^{(2)} \leq \alpha_i(1 + H_j^{(1)}).$$

E poichè, come si verifica subito, se, per un determinato valore di $\varrho > -1$, il rapporto

$$\frac{A_r - a_{rn}\alpha_r}{A_r + \varrho a_{rn}\alpha_r}$$

è il massimo dei numeri

$$\frac{A_i - a_{in}\alpha_i}{A_i + \varrho a_{in}\alpha_i},$$

esso rimane il massimo, qualunque sia il valore che si attribuisce a ϱ, purchè maggiore di -1, dovranno valere le relazioni:

$$h_i^{(1)} \leq h_r^{(} = h\frac{A_r - a_{rn}\alpha_r}{A_r - ha_{rn}\alpha_r},$$

$$H_i^{(1} \leq H_r^{(} < H\frac{A_r - a_{rn}\alpha_r}{A_r},$$

che, ponendo, per brevità,

$$\tau = \frac{A_r - a_{rn}\alpha_r}{A_r - ha_{rn}\alpha_r} \quad , \quad \sigma = \frac{A_r - a_{rn}\alpha_r}{A_r},$$

equivalgono alle seguenti:

$$h_i^{(1)} \leq h \,.\, \tau = h^{(1)} \quad , \quad H_i^{(1)} < H \,.\, \sigma = H^{(1)}.$$

Per le (5), abbiamo inoltre:

$$\alpha_i(1 - h^{(1)}) \leq x_i^{(2)} < \alpha_i(1 + H^{(1)}),$$

dalle quali risulta che i numeri $h^{(1)}$ e $H^{(1)}$ soddisfanno, rispetto ai numeri $h_i^{(1)}$, alle medesime condizioni cui soddisfanno i numeri h ed H rispetto agli h_i.

In generale, ammesso di conoscere due numeri,

$$h^{(p-1)} = h\tau^{p-1} \quad , \quad H^{(p-1)} = H\sigma^{p-1},$$

tali che sia

$$\alpha_i(1 - h^{(p-1)}) < x_i^{(p)} < \alpha_i(1 + H^{(p-1)}),$$

con un ragionamento del tutto analogo al precedente, che per brevità ometiamo, si può dimostrare la esistenza di un'altra coppia di numeri

$$h^{(p)} = h\tau^p \quad , \quad H^{(p)} = H\sigma^p,$$

tale che fra i numeri $\alpha_i(1 - h^{(p)})$ e $\alpha_i(1 + H^{(p)})$ sia sempre compreso l'elemento $x_i^{(p+1)}$.

Notando, infine, che le successioni $h^{(p)}$ ed $H^{(p)}$ tendono a zero, perchè i numeri τ e σ sono entrambi minori dell'unità, concludiamo che, per un i generico, è

$$\lim_{p=\infty} x_i^{(p)} = \alpha_i ,$$

e, a norma delle (3), anche

$$\lim_{p=\infty} y_j^{(p)} = \beta_j .$$

c. d. d.

4. Se m numeri $c_1 , c_2 , \dots , c_m$ sono ordinatamente maggiori di $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_m$, diremo che costituiscono un'*emmupla di eccesso*, e similmente diremo che costituiscono un'*emmupla di difetto* se ciascun c_i è minore del valor limite corrispondente. È facile riconoscere che, partendo da un'emmupla di eccesso, le $x_1^{(p)} , x_2^{(p)} , \dots , x_m^{(p)}$, costituiscono ancora emmuple di eccesso, mentre le $y_j^{(p)}$ sono minori dei relativi limiti; partendo invece da un'emmupla di difetto, le successive $x_1^{(p)} , x_2^{(p)} , \dots , x_m^{(p)}$ formano emmuple di difetto, e le $y_j^{(p)}$ si mantengono tutte superiori ai corrispondenti limiti.

Abbiamo inoltre:

Condizione sufficiente perchè un dato sistema di valori c_i costituisca un'emmupla di eccesso, è che sia:

$$c_i > x_i^{(2)} . \qquad (i = 1 , 2 , \dots , m)$$

Ciò, infatti, risulta subito dall'osservare che in tal caso, con un ragionamento esposto al n. 2, si dimostra che le successioni (2) sono tutte decrescenti.

In modo analogo si può provare che:

Condizione sufficiente perchè un dato sistema di numeri c_i costituisca un'emmupla di difetto, è che sia:

$$c_i < x_i^{(2)} . \qquad (i = 1 , 2 , \dots , m)$$

5. Da quanto venno esposto si ricava un metodo per l'effettivo calcolo della soluzione uniforme del sistema di equazioni (1). Basterà infatti, assegnati m valori positivi arbitrarî per gli elementi $x_i^{(1)}$, servirsi delle formole (2) e (3) per la determinazione delle successive approssimazioni. Per rendere più breve il calcolo, converrà partire da valori quanto più prossimi è possibile ai valori limiti. A questo scopo possono essere di guida le seguenti osservazioni:

a) Badando alle (2) ed al fatto che dev'essere soddisfatta l'equazione

$$\sum_1^m{}_r \, a_{rn} x_r = B_n , \tag{6}$$

si riconosce che ciascuna α_i è minore del più piccolo dei numeri $\frac{A_i}{a_{in}}$ e $\frac{B_n}{a_{in}}$.

b) Se le colonne della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni (1) sono fra loro proporzionali, ed in particolare, quindi, se sono fra loro eguali, è, come subito si verifica,

$$\alpha_i = \frac{A_i B_n}{a_{in} D} \quad , \quad \beta_j = \frac{B_j a_{rn}}{B_n a_{rj}} ,$$

nelle quali l'indice r è arbitrario, essendo, per l'ipotesi supposta, il valore del rapporto $\frac{a_{rn}}{a_{rj}}$ dipendente dal solo indice j.

c) Se i numeri c_i, che si attribuiscono alle $x_i^{(1)}$, soddisfanno alla (6), alcuni di essi sono *in generale* maggiori, e gli altri minori dei rispettivi limiti.

Tali sono, ad esempio, i numeri $\frac{A_i B_n}{a_{in} D}$.

6. Partendo da un'emmupla di eccesso, è facile assegnare un limite superiore dell'errore che si commette arrestandosi ad una approssimazione di un dato ordine p, quando cioè si assumono per le x_i e le y_j le determinazioni $x_i^{(p)}$ ed $y_j^{(p)}$ anzichè i rispettivi limiti α_i e β_j.

Siano c_i i valori attribuiti alle $x_i^{(1)}$ e sia g_i un'emmupla di difetto. Indichiamo con $\varepsilon_i^{(p)}$ la differenza $x_i^{(p)} - \alpha_i$, con R il maggiore dei numeri $c_i - g_i$ e poniamo

$$g_i = \frac{A_i}{a_{in}} q_i ,$$

con che le q_i risultano necessariamente frazioni proprie.

Tenuto presente quanto venne esposto al numero 3, ed osservato che il prodotto $H\alpha_i$ può sempre supporsi minore di R, sarà:

$$\varepsilon_i^{(p)} < H\alpha_i \left(\frac{A_i - a_{in}\alpha_i}{A_i}\right)^{p-1} < R\left(\frac{A_i - a_{in} g_i}{A_i}\right)^{p-1} < R(1 - q_i)^{p-1} .$$

Matematica. — *Sulla definizione di arco di una curva e dell'integrale di Weierstrass, che si presenta nel calcolo delle variazioni.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Corrispondente O. Tedone.

I risultati di questa Nota non sono completamente nuovi; li pubblico, perchè la seguente dimostrazione è semplicissima, e, senza artificio alcuno, giunge ai risultati più generali nel modo più breve.

Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ funzioni continue a variazione limitata, le quali nell'intervallo $a \leq t \leq b$ definiscono una curva continua rettificabile. L'arco s di questa curva è dato da $\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$, allora, e allora soltanto, che $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ siano assolutamente continue. Questo teorema, ottenuto con successive generalizzazioni da Lebesgue, De la Vallée-Poussin e Tonelli, si può (Tonelli) dimostrare facilmente con un semplice artificio dovuto al De la Vallée-Poussin.

Possiamo in tal caso assumere al posto del parametro t il parametro s, o, senz'altro, supporre $t = s$.

Consideriamo una poligonale P inscritta nella curva, avente i vertici successivi nei punti $t_1 = a$, $t_2 > t_1$. $t_3 > t_2$, ... , $t_n = b$. Al variare della P in modo che *la massima delle* $t_{n+1} - t_n$ *tenda a zero*, il perimetro di P *avrà per limite la lunghezza* $b - a$ *dell'arco di curva dato.*

Sia P una delle nostre poligonali; noi potremo ancora definire le coordinate di un suo punto come date da equazioni $x = \overline{x}(t)$, $y = \overline{y}(t)$, $z = \overline{z}(t)$ (per $a \leq t \leq b$) in molteplici modi. E noi fisseremo che un vertice della poligonale, il quale è pure un punto della curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ data, sia definito dallo stesso valore di t, vuoi come punto della curva, vuoi come punto della poligonale; che cioè, nelle nostre notazioni, sia $x(t_r) = \overline{x}(t_r)$, $y(t_r) = \overline{y}(t_r)$, $z(t_r) = \overline{z}(t_r)$ per $r = 1, 2, \ldots, n$. E ancora fisseremo che per $t_r \leq t \leq t_{r+1}$ le $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$, $\overline{z}(t)$ siano funzioni lineari della t. Con queste convenzioni, data la poligonale P, restano completamente individuate le $\overline{x}(t)$, $\overline{y}(t)$, $\overline{z}(t)$. Tra i punti di P e i punti della data curva resta così definita una corrispondenza, in cui due punti sono considerati corrispondenti quando corrispondono ad uguali valori del parametro t. In questa corrispondenza i vertici di P corrispondono a se stessi.

Noi ora proveremo che: *Se* P *varia così che la massima delle* $t_{r+1} - t_r$ *tenda a zero*, per ogni valore di t, per cui esistono e sono finiti $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, cioè *per quasi tutti i valori di* t, *è*

$$\lim \overline{x}'(t) = x'(t) \ , \ \lim \overline{y}'(t) = y'(t) \ , \ \lim \overline{z}'(t) = z'(t).$$

In altre parole, le derivate di x, y, z calcolate in un punto della poligonale P hanno per limite le derivate analoghe calcolate nel punto corrispondente della curva data.

Sia t un valore per cui esista $x'(t)$. Il punto corrispondente della curva, e il punto omologo di P, si troveranno rispettivamente su un archetto di tale curva e su quel lato di P che ne congiunge gli estremi. Siano t_r, t_{r+1} i due vertici estremi comuni di tale archetto e di tale lato. Senza escludere che il punto considerato sia esso stesso un vertice di P, sarà $t_r \leq t \leq t_{r+1}$. La derivata $\overline{x}'(t)$ è costante sul lato considerato della nostra poligonale, e vale

$$\overline{x}'(t) = \frac{\overline{x}'(t_{r+1}) - \overline{x}'(t_r)}{t_{r+1} - t_r} = \frac{x(t_{r+1}) - x(t_r)}{t_{r+1} - t_r} .$$

Ora

$$x(t_{r+1}) = x(t) + (t_{r+1} - t)\, x'(t) + \varepsilon(t_{r+1} - t)$$
$$x(t_r) \quad = x(t) - (t - t_r) \quad x'(t) - \eta(t - t_r) ,$$

dove ε, η tendono a zero con $t_{r+1} - t_r$. Dunque

$$\overline{x}'(t) = x'(t) + \frac{\varepsilon(t_{r+1} - t) + \eta(t - t_r)}{t_{r+1} - t_r} = x'(t) + \varepsilon + (\eta - \varepsilon)\frac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} .$$

Osservando che $0 \leq \dfrac{t - t_r}{t_{r+1} - t_r} \leq 1$, se ne deduce che, per $t_{r+1} - t_r = 0$, è appunto $\overline{x}'(t) = x'(t)$, ecc., come volevasi provare.

L'applicazione all'integrale di Weierstrass è immediata.

Sia $f(x, y, z\,;\, x', y', z')$ una funzione finita e continua e quindi anche limitata, fino a che (x, y, z) varia in un certo dominio Γ, e x', y', z' soddisfano alla $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. La f sia positivamente omogenea di grado 1; cioè, per ogni valore del numero $k > 0$, sia

$$f(x, y, z\,;\, x', y', z') = f(x, y, z\,;\, kx', ky', kz') .$$

Sia C una curva rettificabile interna a Γ, di cui $x = x(s), y = y(s)$, $z = z(s)$ definiscano un punto generico A, in funzione dell'arco s misurato da un estremo di C fino al punto A. Lo $J = \int f(x, y, z\,;\, x', y', z')\, ds$, *esteso a tale curva* C, *è, secondo Weierstrass, il limite dell'integrale analogo relativo ad una poligonale* P *inscritta in* C, quando il massimo lato di P tende a zero. Evidentemente questa definizione non muta se poniamo le equazioni parametriche di P sotto la forma $x = \overline{x}(t), y = \overline{y}(t), z = \overline{z}(t)$,

dove t è il parametro sopra definito, e consideriamo J come il limite dell'integrale (calcolato secondo Riemann)

$$(1) \qquad \int f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}_t', \bar{y}_t', \bar{z}_t')\, dt$$

esteso a P, quando il massimo lato di P tende a zero.

Ora è ben evidente che $\bar{x}'^2(t) + \bar{y}'^2(t) + \bar{z}'^2(t) \leq 1$.

Quindi $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ è *limitato*, se la poligonale P ha i lati così piccoli che ogni suo punto appartenga a Γ. Per un noto teorema del Lebesgue, il limite di (1) coincide con l'integrale del $\lim f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ *calcolato al modo del Lebesgue*. E per i nostri risultati precedenti ($\lim \bar{x}' = x'$, ecc.), ne concludiamo:

Per le curve rettificabili, l'integrale di Weierstrass è uguale all'integrale del Lebesgue [1].

Meccanica. — *Nuovi tipi di onde periodiche permanenti e rotazionali.* Nota II di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

6. Per integrare la (15) [2],

$$(15) \qquad \dot{\eta}^2 = \frac{2}{\varrho}(\eta - l)(k - \eta)(\eta + k'),$$

[1] Questo teorema è stato per tutt'altra via ottenuto, in casi meno generali, dal prof. Tonelli nel tomo 32 (1911) dei Rendic. del Circ. matem. di Palermo; e in questi Rendic. 14 aprile 1912. In casi particolari il prof. Tonelli ha dimostrato, in più, che la rettificabilità di C è condizione necessaria affinchè l'integrale di Weierstrass sia finito.

[2] L'equazione differenziale del profilo delle onde « cnoidali » di Korteweg e De Vries è [cfr. Lamb, loc. cit., pag. 402]:

$$\dot{y}^2 = \frac{3g}{c^2 h^2}(y - l)(h_1 - y)(y - h_2),$$

dove h_1 e h_2 sono il massimo e il minimo dei valori di y, c la velocità di propagazione, e $l = \frac{c^2 h^2}{g h_1 h_2}$. Come si vede, questa equazione è del tipo (15). Tuttavia l'integrazione della (15) non si può far dipendere da quella precedente fatta da Korteweg e De Vries, e conduce, per conseguenza, ad un profilo d'onda diverso. La ragione sta nella circostanza che la costante k', che comparisce nella (15), è positiva [cfr. n. 4], mentre la costante corrispondente nell'altra equazione è $-l$, che è negativa. Gli autori, supposto infatti $h_2 < h < h_1$, pongono

$$\beta = \sqrt{\frac{4 h_1 h_2 l}{3(h_1 - l)}}, \quad k^2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - l},$$

e, integrando, trovano pel profilo dell'onda l'equazione

$$y = h_2 + (h_1 - h_2)\, cn^2 \frac{x}{\beta} \qquad [\text{mod } k].$$

giova sostituire, alla incognita funzione η di ξ, una nuova funzione incognita p, mediante la seguente posizione:

$$\eta = \frac{p+\alpha}{p+\beta}, \tag{18}$$

dove α e β rappresentano due costanti che mi riservo di fissare in seguito in modo opportuno.

Avendosi dalla precedente, derivando,

$$\dot{\eta} = \frac{\beta-\alpha}{(p+\beta)^2}\dot{p}, \tag{19}$$

la (15) si trasforma, per questa e per la (16), nella seguente:

$$\dot{p}^2 = \frac{2(k-1)(k'+1)}{\varrho(\alpha-\beta)}\left[p+\beta\right]\left[p+\frac{\beta k-\alpha}{k-1}\right]\left[p+\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}\right];$$

oppure, notando che, per le (14),

$$(k-1)(k'+1) = \varrho - 1,$$

$$\dot{p}^2 = \frac{2(\varrho-1)}{\varrho\,.\,(\alpha-\beta)}\left[p+\beta\right]\left[p+\frac{\beta k-\alpha}{k-1}\right]\left[p+\frac{\beta k'+\alpha}{k'+1}\right]. \tag{20}$$

Ciò posto, determiniamo α e β, mediante il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha-\beta = \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}, \\ \beta + \dfrac{\beta k-\alpha}{k-1} + \dfrac{\beta k'+\alpha}{k'+1} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

e ciò allo scopo, ben manifesto, di rendere $=4$ il coefficiente di p^3 nel secondo membro della (20), e di rendere nulla la somma delle radici dell'equazione $\dot{p}^2 = 0$.

Risolvendo il sistema (21), si ha, tenendo conto delle (14),

$$\alpha = \frac{5\varrho-2}{12\varrho}, \quad \beta = \frac{4-\varrho}{12\varrho}. \tag{22}$$

Come si vede tale integrale è legato al fatto che, essendo $l>0$ e $h_1 - l > 0$, β è reale. Nel caso nostro, l'integrale precedente non è applicabile, perchè darebbe per β un valore immaginario. D'altra parte, confrontando la precedente colla (28), si vede che le equazioni sono essenzialmente differenti, e quindi i profili delle nostre onde non sono *cnoidali*.

Posto quindi

$$(23)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\beta k-\alpha}{k-1}=\dfrac{(\varrho-4)\,k+5\varrho-2}{12\varrho(k-1)}=e_1\,, \\ -\beta=\dfrac{\varrho-4}{12\varrho}=\begin{cases} e_2 \text{ se } \varrho>1\,, \\ e_3 \text{ se } \varrho<1\,, \end{cases} \\ -\dfrac{\beta k'+\alpha}{k'+1}=\dfrac{(\varrho-4)\,k'-5\varrho+2}{12\varrho(k'+1)}=\begin{cases} e_3 \text{ se } \varrho>1\,, \\ e_2 \text{ se } \varrho<1\,, \end{cases} \end{cases}$$

dove ora è, in ogni caso,

$$e_1+e_2+e_3=0\,,$$

la (20) diviene

$$(24)\qquad \dot{p}^2=4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)\,.$$

La p è dunque la funzione ellittica di Weierstrass, i cui invarianti g_2 e g_3 sono notoriamente legati a e_1, e_2, e_3 dalle relazioni

$$(25)\qquad \begin{cases} e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2=-\dfrac{1}{4}g_2\,, \\ e_1e_2e_3=\dfrac{1}{4}g_3\,. \end{cases}$$

7. È facile verificare che è, in ogni caso:

$$(26)\qquad e_1>e_2>e_3\,,$$

Infatti, cominciamo a dimostrare che è sempre $e_1>0$. Il numeratore di e_1 è >0 se $\varrho>1$, ed è <0 se $\varrho<1$ [cfr. n. 5]; lo stesso dicasi del denominatore. Dunque, numeratore e denominatore di e_1 essendo sempre dello stesso segno, sarà $e_1>0$.

In quanto a e_2, esso è ≥ 0 se $\varrho\geq 4$ e in tal caso è manifestamente $e_1>e_2$. Facciamo ora vedere che in ogni caso è

$$e_2-e_3>0\,,$$

Infatti, essendo, per le (23), nel caso $\varrho>1$,

$$e_3=-(e_1+e_2)=-\frac{(\varrho-4)\,k+2\varrho+1}{6\varrho(k-1)}\,,$$

sarà

$$e_2-e_3=\frac{f(\varrho)}{12\varrho(k-1)}\,,$$

avendo posto

$$f(\varrho)=(\varrho-4)(3k-1)+4\varrho+2\,.$$

È facile il vedere che $f(\varrho) > 0$; inquantochè è $f'(\varrho) = 3(k+1) > 0$ e $f(0) = 2$.

Dopo ciò potremo concludere che, se è $\varrho > 1$, e quindi [n. 5] $k > 1$, è $e_2 - e_3 > 0$. In modo analogo si vede che se è $\varrho < 1$, essendo allora $k < 1$, è $e_2 - e_3 > 0$.

Restano intanto dimostrate le diseguaglianze (26).

8. In ogni caso, dalle (23) scende che le radici e_1, e_2, e_3 della $\dot{p}^2 = 0$, si mantengono sempre reali; perciò il discriminante

$$\Delta = \{4(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\}^2$$

è sempre positivo, e si annulla solo per $\varrho = 1$, valore che abbiamo escluso [n. 5].

In tali circostanze la funzione p ammette due periodi, 2ω e $2\omega'$, reale il primo e immaginario il secondo, definiti notoriamente dalle formule seguenti:

$$(27) \qquad \begin{cases} 2\omega = \displaystyle\int_{-e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}, \\ \dfrac{2\omega'}{i} = \displaystyle\int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}. \end{cases}$$

Quest'ultimo non ha, evidentemente, alcun interesse per noi.

Ciò posto, la (18) per l'ultime delle (14), definisce in modo completo il pelo libero λ, il quale ha per equazione

$$(28) \qquad y = h\frac{p+\alpha}{p+\beta}, \quad \text{dove} \quad p = p(\xi) = p\left(\frac{x}{h}\right),$$

essendo α e β definite in funzioni di ϱ mediante le (22).

La eliminazione di y tra la precedente e la (12),

$$a_1 = \frac{q}{y},$$

definisce la funzione $a_1\left(\frac{x}{h}\right)$; si ottiene così

$$(29) \qquad a_1 = \frac{q}{h}\frac{p+\beta}{p+\alpha}, \quad \text{dove} \quad p = p\left(\frac{x}{h}\right),$$

per la quale l'espressione (10)

$$\psi = a_1 y.$$

della funzione di corrente, diviene

$$\psi = \frac{q}{h}\,\frac{p+\beta}{p+\alpha}\,y\,. \tag{30}$$

Come si vede, si tratta di onde periodiche e di periodo $2\omega h$ definito dalla prima delle (27).

9. È interessante di stabilire la profondità del canale, cioè il valor medio delle altezze del pelo libero sul fondo del canale. Tale altezza media, che indicherò con H, sarà definita, a norma della (28), dalla seguente espressione:

$$H = h\int_0^{2\omega} \frac{p+\alpha}{p+\beta}\,d\xi\,;$$

ma essendo, per le (22) e le (23),

$$\frac{p+\alpha}{p+\beta} = 1 + \frac{\alpha-\beta}{p+\beta} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,\dfrac{1}{p-e_2} & \text{se } \varrho > 1\,, \\ 1 + \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,\dfrac{1}{p-e_3} & \text{se } \varrho < 1\,, \end{cases}$$

sarà

$$H = 2\omega h + \begin{cases} \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,h\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{p-e_2}\,, & \text{se } \varrho > 1\,, \\ \dfrac{\varrho-1}{2\varrho}\,h\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{p-e_3}\,, & \text{se } \varrho < 1\,. \end{cases} \tag{31}$$

Supposto $\varrho > 1$, si ha [1], tenendo presenti le (23),

$$\frac{1}{p-e_2} = \frac{p(\xi-\omega-\omega')-e_2}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)} = (k-1)^2\,\frac{24\varrho^2 p(\xi-\omega-\omega') - 2(\varrho-4)\varrho}{3(1-\varrho)\{(\varrho-4)k+\varrho+2\}}\,,$$

dove ω' è definita dalla seconda delle (27); per questa da (31), si ricava

$$H = 2\omega h\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{(\varrho-4)(k-1)^2}{(\varrho-4)k+\varrho+2}\right\} \quad \text{per} \quad \varrho > 1\,. \tag{32}$$

Supposto $\varrho < 1$, allora essendo [2] per le (23):

$$\frac{1}{p-e_3} = \frac{p(\xi-\omega')-e_3}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} = (k-1)^2\,\frac{24\varrho^2 p(\xi-\omega') - 2(\varrho-4)\varrho}{3(\varrho-1)\{(\varrho-4)k+\varrho+2\}}\,,$$

da (31) si ricava in definitiva:

$$H = 2\omega h\left\{1 - \frac{1}{3}\,\frac{(\varrho-4)(k-1)^2}{(\varrho-4)k+\varrho+2}\right\} \quad \text{per} \quad \varrho < 1\,. \tag{33}$$

[1] Cfr., ad es., Halphen, *Fonctions elliptiques* [Paris, 1886, vol. 1, pag. 205].

[2] Cfr. Halphen, loc. cit.

Geografia fisica. — *Quarta relazione della spedizione scientifica nel Karakoram orientale*, trasmessa al PRESIDENTE dal capo della spedizione dott. FILIPPO DE FILIPPI.

La spedizione lasciò la stazione di Suget nella valle del Karakash, a nord del Karakoram, nei primi giorni di settembre, per recarsi nella valle dell'alto Yarkand o Raskem Daria, valicando il colle Kug Art (4925 m.). Raggiunto il fiume a Kirghiz Jangal, ci dividemmo nuovamente in due gruppi. Il maggiore Wood risalì la valle per riunirsi a Kufelang con l'ing. Spranger e Petigax, e procedere con loro alla esplorazione dei due affluenti occidentali, di cui aveva constatato l'esistenza nel mese precedente.

Il dott. De Filippi, il prof. Abetti ed il marchese Ginori si diressero a valle con l'intenzione di raggiungere l'Oprang attraversando la catena Aghil.

Avevamo sperato che il mal tempo, di cui avevamo sofferto nell'estate, sarebbe cessato coll'autunno, ma fummo completamente delusi. Ogni giorno cadeva nuova neve sulle creste e pioggia nelle valli; l'atmosfera torbida e carica di vapori toglieva la vista dei monti e delle catene, rendendo oltremodo difficile e penoso il lavoro topografico. La conseguenza più grave di questo persistente cattivo tempo fu la mancata diminuzione autunnale dei fiumi, sulla quale avevamo contato e senza la quale è impossibile percorrere queste valli. Nei primi due giorni dopo lasciato Kirghiz Jangal, guadammo il Yarkand otto volte, in certi tratti dove la valle più ampia permetteva al fiume di dividersi in più rami. Più sotto, la valle si rinserrò in gola, e divenne impossibile di attraversare il fiume raccolto in un unico letto.

Con molte difficoltà, specie per il trasporto del bagaglio, riuscimmo a superare varî alti contrafforti del lato destro della valle e sei giorni dopo, lasciato Kirghiz Jangal, scendemmo a precipizio da uno di questi in faccia alla valle per la quale dovevamo salire al colle Aghil.

Fra noi ed essa correva però il fiume gonfio, torbido, violento e pieno di gorghi. Dopo aver speso un giorno intiero in vani tentativi, dovemmo persuaderci che era inutile sperare di poterlo traversare con la carovana. Solo qualche robusto cavallo riusciva a raggiungere l'altra riva a nuoto. I cammelli erano trascinati via.

Così, con grande rincrescimento, fummo costretti a rinunciare alla progettata esplorazione della valle Oprang.

Nel frattempo, la comitiva del maggiore Wood visitava, l'uno dopo l'altro, i due affluenti occidentali dello Yarkand. Contrariamente alle nostre previsioni, questi non provengono dai versanti settentrionali della catena del Karakoram, ma da una catena nevosa a settentrione di essa, la quale, probabilmente, separa il bacino dell'alto Yarkand da quello dell'Oprang. Quando sarà fatta la definitiva compilazione della nostra carta, potremo forse renderci conto dei rapporti di questa catena colla Aghil e col Karakoram.

In una di queste valli tributarie, e precisamente nella settentrionale, a circa cinque miglia sopra la sua confluenza con lo Yarkand, la comitiva esplorativa scoprì traccie del passaggio di uomini; alcuni esemplari del Corano, e poche lettere. Questa valle è una gola così stretta, che per giornate intiere si deve procedere nell'acqua del torrente; e sembra impossibile che essa sia mai stata una via di regolari comunicazioni. Tuttavia questa scoperta sembra dar fondamento alle tradizioni di una via diretta fra Kufelang e la valle Nubra di cui fan cenno molti antichi esploratori (G. W. Hayward, ecc.); ma che nessuno ha finora verificate. Coll'aiuto delle lettere da noi ritrovate, stiamo ora facendo una inchiesta a Yarkand e Kashgar, nella speranza di raccogliere qualche maggiore informazione.

Dal Raskem Daria le due comitive topografiche attraversarono per vie diverse il Kuen Lun occidentale, e pervennero direttamente a Kargalik e Yarkand.

Fra il 27 settembre e il 10 ottobre venne eseguita la stazione gravimetrica e magnetica di Yarkand, dove ricevemmo anche ottimamente i segnali di tempo radiotelegrafici trasmessi da Lahore. Il 15 ottobre giungevamo e Kashgar, dove ritrovavamo ospitalità europea nelle case dei consoli generali inglese e russo. I lavori geografici ci trattennero undici giorni. Grazie al metodo radiotelegrafico, si potranno determinare con grande esattezza le longitudini di Yarkand e di Kashgar, due stazioni importanti che hanno servito di base per tutto il lavoro topografico del Turkestan cinese.

Il 27 ottobre lasciavamo Kashgar per l'ultimo tratto di viaggio in carovana. In undici giorni attraversammo la complicata regione montuosa interposta fra Turkestan orientale e Turkestan russo, trovando i colli più alti (Terek Dawan) coperti già dalle prime nevi autunnali; e ad Andijan ritrovavamo la ferrovia, dopo quattordici mesi di viaggio per le vie carovaniere.

Nell'osservatorio di Taskent, compivamo l'ultima delle stazioni gravimetriche iniziate all'ufficio trigonometrico di Dehra Dun; ed il collegamento del sistema indiano con quello della Russia Asiatica era così completato.

L'Istituto topografico militare di Taskent ha cortesemente acconsentito a prendere in consegna il materiale scientifico strumentale della spedizione ed a trattenerlo fino a che siano ristabilite le vie normali di tras-

porti interrotte dallo stato di guerra. La spedizione ha recato con sè in Italia soltanto i cronometri, le lenti fotografiche, l'apparecchio gravimetrico, tutti i dati ed i documenti scientifici, le carte ed il materiale fotografico esposto.

Il comandante Alessio ed il prof. Abetti sono ora intenti ad eseguire l'ultima stazione gravimetrica all'Istituto idrografico della regia marina a Genova, con lo stesso apparecchio che ha servito a tutte le nostre osservazioni. La stazione di Genova è stata pure la nostra stazione di partenza. In questo modo tutto il sistema di stazioni gravimetriche dell'India, dell'Asia centrale e della Russia asiatica sarà collegato con una stazione fondamentale.

Riassunto generale dei lavori della spedizione.

La spedizione ha potuto svolgere intieramente il suo programma di ricerche, in sedici mesi e mezzo di lavoro.

Nel campo della geofisica, il sistema di stazioni eseguite dall'Ufficio Trigonometrico dell'India nei piani preimalaiani è stato collegato con quello stabilito nel Turkestan russo da quell'Ufficio Geodedico Militare, per mezzo di una catena di stazioni eseguite attraverso i grandi sistemi di monti interposti fra India occidentale ed Asia centrale, ed attraverso il Turkestan cinese. Tutto questo complesso sistema è collegato colla rete europea per mezzo della stazione fondamentale di Genova.

Le stazioni da noi eseguite furono quattordici: e, non ostante le difficoltà dovute alle condizioni eccezionali nelle quali si dovette spesso osservare, sono state condotte tutte col più rigoroso metodo scientifico. Vennero sempre osservati otto pendoli. L'apparato gravimetrico fu sempre adoperato senza supporto ed appoggiato generalmente sopra un grosso masso di pietra interrato, col quale si ottennero sempre variazioni minime del valore della flessione. Dove mancavano gli edificii, le osservazioni si fecero in una grande tenda appositamente costruita, nella quale le variazioni termiche si mantennero nei limiti desiderati. Vennero determinate con grande esattezza le coordinate geografiche di ogni stazione, e si raccolsero dati topografici del terreno adiacente, corredandoli con vedute e panorami fotografici. La spedizione era fornita di cronometri e di strumenti astronomici.

Per i caratteri eccezionalissimi della regione attraversata dalla spedizione, l'analisi delle determinazioni gravimetriche non può mancare di condurre ad interessanti constatazioni sulla influenza che le masse montane, l'altitudine ecc., esercitano sul valore della gravità. Le stazioni vennero eseguite ad altezze che variano fra 1500 e 5300 m. sul livello del mare.

In tutte le stazioni si fecero anche osservazioni magnetiche (inclinazione, declinazione e forza); ed a Skardu, approfittando della lunga sosta invernale, venne anche determinata la variazione magnetica diurna.

Dovunque la spedizione si fermò per le osservazioni geofisiche, si fecero regolari osservazioni meteorologiche, lanci di palloni-piloti e, quando il tempo lo permetteva, osservazioni di radiazione solare con varii pireliometri. Particolarmente notevoli sotto questo riguardo sono le stazioni di Skardu, dove si raccolsero regolarmente i dati meteorologici durante quattro mesi, nell'inverno 1913-14; e quella dell'altipiano Depsang, a 5300 metri di altitudine, dove si fecero ininterrotte osservazioni per due mesi e mezzo.

Per accordi presi coll'Ufficio Meteorologico Indiano, i lanci di palloni-piloti venivano eseguiti simultaneamente da varie stazioni dell'India, per modo che si spera di poter dèsumere dai dati d'assieme qualche conclusione intorno al regime dei venti, con speciale riguardo allo studio dei monsoni.

È difficile, od anzi impossibile, di riferire in modo intelligibile intorno al lavoro geografico, senza l'aiuto di carte o di illustrazioni; per cui mi limito a pochi cenni sommarii. L'estremità orientale della catena del Karakoram era, finora, molto incompletamente conosciuta. Verso il 1865, un topografo dell'Ufficio trigonometrico indiano, il Johnson, aveva fatto un rilevamento delle valli, attraverso le quali passa la via carovaniera fra il Ladakh e l'Asia centrale. Egli aveva veduto la fronte di un ghiacciaio dalla quale esce uno dei principali tributarii dell'Indo superiore, il fiume Shyok, ed aveva chiamato Remo questo ghiacciaio. Ma non aveva potuto determinarne l'estensione, nè la direzione o la disposizione delle valli in cui scende; nè accertare la posizione dello spartiacque. L'esplorazione di questo ghiacciaio e della porzione corrispondente del Karakoram fu il lavoro della spedizione nell'estate trascorso. Il Remo si rilevò come un ghiacciaio di proporzioni e di importanza inaspettate. Il bacino glaciale ha oltre 700 chilometri quadrati di superficie, ed è formato da tre grandi fiumane di ghiaccio, lunghe oltre 30 chilometri, che riempiono valli di 5-8 chilometri di larghezza. Il ghiacciaio ha caratteri molto singolari, e il suo bacino è come un termine di passaggio tra la valle e l'altipiano. Il fatto più interessante è senza dubbio quello che il Remo dà ad un tempo origine al fiume Shyok, tributario dell'Indo, le cui acque vanno all'Oceano Indiano, ed allo Yarkand, uno dei grandi fiumi che vanno a perdersi nelle sabbie dell'Asia Centrale.

L'esplorazione della zona limitrofa del Karakoram ha permesso di constatare in questa regione una grande incertezza dello spartiacque, la quale prelude senza dubbio ai bacini chiusi degli altipiani tibetani.

La scoperta delle sorgenti del fiume Yarkand ci condusse poi alla esplorazione sistematica di tutto il suo bacino superiore.

Questi lavori furono continuamente ostacolati dal persistente cattivo tempo. Tuttavia, grazie alla concorde attività di tutti, si poterono triangolare e rilevare quasi 5000 miglia quadrate di terreno.

Particolarmente interessanti furono le determinazioni di differenze di longitudine col metodo delle trasmissioni radiotelegrafiche di segnali di tempo. I segnali venivano trasmessi dalla stazione radiotelegrafica di Lahore, ed erano ricevuti simultaneamente dall'Ufficio Trigonometrico di Dehra Dun e da noi, nelle varie stazioni. Prima e dopo della trasmissione veniva determinato il tempo locale, con osservazioni stellari. In questo modo si potranno calcolare le longitudini con grande approssimazione e sarà possibile di determinare — coll'aggiunta della latitudine — la deviazione della verticale in tutte le stazioni eseguite nella valle dell'Indo e nella stazione sull'altipiano Depsang; mentre si otterranno esatte coordinate per le stazioni del Karakoram e dell'Asia centrale, utili sia per la correzione delle carte antiche, sia per il futuro lavoro topografico in quelle regioni.

La vasta zona montuosa interposta fra India occidentale ed Asia Centrale non ebbe alcuna cattiva influenza sulla trasmissione dei segnali radiotelegrafici, i quali vennero sempre percepiti chiarissimi, anche nelle lontane stazioni di Yarkand e di Kashgar.

Mi rimane a dire delle ricerche geologiche. Queste coprono una zona molto più vasta di quella compresa nell'itinerario della spedizione; gran parte del Baltistan e del Ladakh, alcuni dei grandi altipiani del Tibet Occidentale e l'estremità orientale del Karakoram. Fu raccolto un abbondante materiale litologico e molti fossili, grazie ai quali si potrà assegnare una data a molte delle formazioni da noi attraversate; e vennero studiati con particolare cura l'estensione ed il limite dei passati periodi di glaciazione. È da sperare che lo studio del materiale raccolto potrà condurre a qualche dato per una classificazione razionale di quei complicatissimi sistemi di monti, fondata sulla loro costituzione geologica.

Il prof. Dainelli, nel corso delle molte escursioni geologiche, ha anche raccolto abbondante materiale per uno studio antropo-geografico del Baltistan e del Ladakh, la cui antropologia non è stata finora studiata sistematicamente, tanto che si hanno le più contraddittorie notizie sulle razze che vi abitano.

Infine, la spedizione ha riportato un abbondantissimo materiale illustrativo, riguardante tutti i campi della sua attività.

Chimica-fisica. — *Influenza delle basi organiche sul potenziale dell'elettrodo a idrogeno* (1). Nota di Arrigo Mazzucchelli, presentata dal Socio E. Paternò.

In un lavoro recentemente presentato a questa Accademia (2), ho trovato che l'aggiunta dei sali di varie basi organiche influenza sensibilmente il potenziale di riposo di un elettrodo di zinco immerso nella soluzione del suo solfato. Ho già annunziato la mia intenzione di estendere queste ricerche agli altri metalli più comuni, su alcuni dei quali sto già lavorando; ma intanto si presentava di particolare interesse la questione, se analoghi fenomeni si manifestino anche nel caso dell'elettrodo a idrogeno, il quale occupa una posizione eccezionale pel fatto che i cationi H^+ che esso emette sono quelli stessi che, sommandosi col gruppo amminico delle basi organiche, dànno origine ai cationi di queste. Con la presente Nota rendo conto dei risultati ottenuti in proposito.

Nelle mie esperienze ho misurato, col solito metodo di compensazione, mediante un elettrometro capillare che dava 0,001 V., e una pila Weston come normale, il potenziale dell'elemento

$$Hg \mid Hg_2SO_4, H_2SO_4\ N \mid H_2\ (Pt).$$

L'elettrodo a idrogeno era del tipo di Böttger (3) (ma con elettrodi in platino, invece che di oro); la lamina di platino era stata platinata elettroliticamente con la nota soluzione di Lummer e Kurlbaum; l'idrogeno era ottenuto da zinco e acido solforico, e veniva depurato attraverso una soluzione di $KMnO_4$, acidulata con ac. solforico. Il potenziale assumeva un valore costante, in meno di una diecina di minuti. Non si tenne conto della tensione di vapore dell'acqua alla temperatura ambiente (verso 14°) nè della pressione barometrica giornaliera, poichè quasi tutte le misure furono fatte in modo comparativo, prima misurando il potenziale dell'elettrodo a idrogeno in soluzione solforica pura, e poi aggiungendo il solfato organico, e ripetendo la misura. L'elettrodo a mercurio era contenuto in un recipiente della forma consueta (4), unito mediante un sifone, da cui si faceva gocciare un po' di liquido alla fine di ogni misura, col bicchierino dove era l'elettrodo a idrogeno, e nel quale si facevano le aggiunte.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Roma.
(2) Seduta del 20 dicembre 1914.
(3) Z. ph. Ch., *24*, 260.
(4) Ostwald, Messungen.

Siccome anche gli elettrodi erano immersi nella stessa soluzione, non esisteva una elettromotrice di contatto liquido, la quale peraltro doveva manifestarsi dopo che si era aggiunto al liquido dell'elettrodo a idrogeno una soluzione tenuta del solfato organico, e anche la seconda della contenente potassio il solfato allo stato solido. Per avere una idea dell'importanza di questa fu, fra saggi comparativi, chiuso un poco l'acido dell'elettrodo a idrogeno, e addizionatovi un po' di solfato potassico elettrolitico ottenne una sensibile azione sul potenziale elettrodico, l'aver chiuso e aggiungendo solfato potassico contemporaneamente, come è espresso negli schemi seguenti in cui il primo corrisponde all'elemento senza ponte ago ne

$$Hg \mid Hg_2SO_4, Hg_2SO_4\,N \mid H_2\,(Pt) = 0.695\ V.\ (^1).$$

Come si vede si tratta di variazioni abbastanza piccole: e poichè nelle nostre ricerche le titolazioni e le aggiunte di solfati organici ebbero luogo per lo meno tre volte ognuna, possiamo con sicurezza affermare che divergenze di questo ordine nella f. e. m. superiori a quelle sopra riportate sono sufficienti da attribuire ad azione specifica delle basi sul processo elettrodico.

Le cui riporto sono altre in forma di tabelle i risultati ottenuti: nella prima è indicata la composizione del liquido intorno all'elettrodo a idrogeno, poco prima e subito dopo l'aggiunta della soluzione titolata e del solfato organico solido, nella seconda i tempi sono indicati i minuti decorsi dopo l'aggiunta, nella colonna « F. E. M. » il numero ottenuto col metodo di compensazione. Nei casi (e sono i più) dove, prima di aggiungere la base, si determinò la f. e. m. dell'elemento in stato normale e non secondo lo schema I, il valore ottenuto è riportato nell'indicazione s. a.

I.

E_0 60 + 0.1 N — [illegible] p. [illegible]

Tempo	F. E. M.
—	0.692 s. a.
8	0.624
30	0.621
[illegible]	[illegible]

II.

E_0 60 + 0.1 $_{n}$ p. [illegible]

Tempo	F. E. M.
—	0.700 s. a.
15	0.682
50	0.682

(1) La stessa cella in soluzione 0.1 N rel. solfo-acetato. Mescuglio [illegible].

$Hg \mid Hg_2SO_4, H_2SO_4\,N \mid H_2SO_4\,0.2\,N \mid H_2\,(Pt) = 0.693\ V.$

$Hg \mid Hg_2SO_4, H_2SO_4\,N \mid E_0\,60 + 0.1\,N \text{ p. } E_0\,60 \mid E_0\,(Pt) = [\text{illegible}]$

$Hg \mid Hg_2SO_4, E_0\,60 + 0.1\,N \mid E_0\,60 + 0.1\,N \text{ p. } E_0\,60 \mid E_0\,(Pt) = [\text{illegible}]$

III.

H_2SO_4 N + 0.5 % *p. solfato brucina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
15	0,668
25	0,674
35	0,678
45	0,678

IV.

H_2SO_4 N + 0.5 % *p. solfato stricnina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
5	0,692
17	0,692
25	0,692
40	0,692

V.

H_2SO_4 0.92 N + 0.7 % *p. solfato cinina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
3	0,690
20	0,692
40	0,692
70	0,696
90	0,696

VI.

H_2SO_4 0.97 N + 0.56 % *p. solfato stricnina*

Tempo	F. E. M.
—	0,696 s. a.
20	0,696
30	0,696
40	0,696

VII.

H_2SO_4 0.975 N + 0.6 % *p. solfato chinolina*

Tempo	F. E. M.
—	0,695 s. a.
5	0,676
7	0,682
13	0,685

VIII.

H_2SO_4 0.975 N + 0.78 % *p. solfato isochinolina*

Tempo	F. E. M.
—	0,695 s. a.
13	0,694
51	0,693

IX.

H_2SO_4 0.955 + 0.70 % *p. solf. dimetilanilina*

Tempo	F. E. M.
13	0,686
25	0,686

X.

H_2SO_4 N + 0.5 % *p. solfato [illegible]*

Tempo	F. E. M.
15	0,650
25	0,653
30	0,667
75	0,672
85	0,679
105	0,682

XI.

H_2SO_4 N + 0,5 % *p. saponina*

Tempo	F. E. M.
—	0,697 s. a.
10	0,697
20	0,698
30	0,698

XII.

H_2SO_4 N + 0.5 % *p. gelatina*

Tempo	F. E. M.
15	0,696
25	0,696

XIII.

H_2SO_4N + 1 % *amido solubile*

Tempo	F. E. M.
15	0,696
45	0,696
50	0,696

Ai numeri precedenti possiamo far seguire brevi osservazioni.

Le basi organiche hanno effettivamente una azione sul potenziale dell'elettrodo a idrogeno, rendendolo più *nobile*, appunto come si era precedentemente esservato nel caso dello zinco. La loro attività varia poi specificamente da sostanza a sostanza (si confrontino, fra gli alcaloidi propriamente detti, le tabelle I, II, III, di fronte alle IV, V, VI); è però notevole che, fra le basi di costituzione più semplice, la chinolina e la dimetilanilina (VII, IX), che influenzano molto la deposizione catodica dello zinco, si mostrano pure assai attive di fronte all'elettrodo a idrogeno. Eccezionalmente attiva è la fenilidrazina, per la quale peraltro si può sospettare una azione depolarizzante propriamente chimica.

L'azione deprimente alle basi si manifesta sempre allo stesso modo: e cioè più energica nei primi tempi, per affievolirsi (più o meno lentamente) in seguito.

Ho limitato in ogni caso le misure a qualche diecina di minuti, perchè non sembra dover essere particolarmente interessante ciò che avviene dopo un tempo assai lungo; sapendosi, infatti, che i catalizzatori (in senso lato) alterano la velocità dei processi, ma non il loro equilibrio definitivo, è ovvio di indurne che al limite dovrà stabilirsi il potenziale normale. Del resto, misure di lunga durata potran sempre farsi, qualora se ne presenti la convenienza.

Ho fatto alcune misure con sostanze colloidi (gelatina, amido) o capaci di concentrarsi alla superficie libera dei liquidi (saponina, che dava abbondante schiuma di grosse bolle colla corrente di idrogeno), sia per avere un termine di contronto, sia in vista delle osservazioni, più che altro qualitative, di C. Marie [1], il quale avrebbe trovato che la gelatina fa aumentare la tensione di deposito elettrolitica dell'idrogeno. Nel nostro caso le tre sostanze hanno una azione quasi nulla, ciò che può stare in relazione col fatto che la diffusione degli joni, e dei cristalloidi in genere, non è notevolmente influenzata dai colloidi.

(1) Compt. rend. *147*, 1908, (1400-1402).

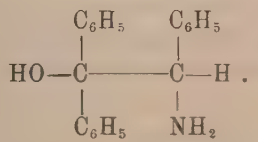
Per quanto concerne invece l'azione delle basi, non è facile darne una interpretazione completa: a una decomposizione elettrolitica del sale, con liberazione della base, che si deporrebbe sul catodo [come ho supposto nel caso dello zinco (1)], in questo caso non può evidentemente pensarsi. In quanto le variazioni della f. e. m. corrispondono a una diminuzione della massa attiva dell'H_2, esse accennano a una diminuzione nell'attività del nero di platino come trasportatore di idrogeno, e l'effetto perciò sarebbe da ravvicinarsi agli « avvelenamenti » dei metalli colloidali (2), processi, del resto, assai oscuri nel loro meccanismo, ma dove in ogni caso ha una parte assai importante l'assorbimento superficiale. Poichè nell'assorbimento dei sali da parte delle superficie solide spesso la parte basica viene più assorbita della acida (valga ad es. il noto caso dell'$Mn\ O_2$), è concepibile che anche in questo caso sia assorbita soprattutto la base libera.

Ma questo fenomeno potrà essere pienamente apprezzato solo in correlazione cogli studî che ho in corso sull'influenza delle basi sui potenziali elettrodici dei metalli; in questa Nota mi basta di aver reso noto il fatto sperimentale.

Mi è grato di ringraziare lo studente signor Di Giorgio, della cui zelante opera mi sono valso nella esecuzione delle misure sperimentali.

Chimica. — *Sulla costituzione del trifenil-ammino-etil-alcool ottenuto per azione della luce* (3). Nota di Lydia Monti, presentata dal Socio E. Paternò.

Nella Nota IX (4) *Sintesi in chimica organica per mezzo della luce* il prof. Paternò descrisse un composto della formula $C_{20}\ H_{19}\ ON$ che ottenne per azione della luce sopra una mescolanza di benzofenone e benzilammina. Per analogia con altre simili reazioni, ammise allora che questo composto si fosse formato per condensazione enolica fra il gruppo CO del benzofenone e il gruppo CH_2 della benzilammina, e che avesse la costituzione di trifenil-ammino-etil-alcool:



(1) loc. cit.

(2) Cfr. Leblanc, *Die elektrom. Kräfte der Polarisation*, Halle, 1910, (39).

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(4) Gaz. Ch. It., *44* (1) 247 (1914).

Siccome prima di allora questa sostanza non era stata ottenuta per altra via, non era inutile cercare di dimostrarne la costituzione. Perciò il prof. Paternò mi dette un campione di tale sostanza perchè cercassi di trasformarla in qualche corpo noto. La via migliore mi sembrò la eliminazione dell'azoto per mezzo dell'acido nitroso, perchè in tal modo avrebbe dovuto ottenersi il trifenil-glicol di Gardeur [1] o qualche suo prodotto di trasformazione che fosse conosciuto.

Gr. 2 di sostanza si disciolgono in circa 25 cc. di acido acetico: se alla soluzione raffreddata si aggiungono circa 2 gr. di nitrito sodico sciolto in poca acqua, subito si svolgono bollicine gassose. Il miscuglio limpido di color giallo chiaro si fa bollire finchè non si vedono più vapori nitrosi; poi si aggiunge acqua e si lascia raffreddare: si deposita una sostanza bianco-giallastra voluminosa che si fa cristallizzare più volte da alcool bollente.

La sostanza così purificata si presenta allora in aghetti bianchi fusibili a 134-136°.

La sostanza seccata a 100° fino a peso costante dette all'analisi i seguenti risultati:

Sostanza gr. 0,2730;	CO_2 gr. 0,8775;	H_2O gr. 0,1468			
Donde %	Trovato	C	87,66	H	5,90

I risultati analitici conducono dunque alla formula $C_{20}H_{16}O$ per la quale si calcola.

C	88,23	H	5,88

Questa sostanza in tutte le sue proprietà è identica a quel prodotto di disidratazione del trifenil-glicol ottenuto allo stato impuro da Klingermann [2] e studiato poi da Delacre [3], da Collet [4] e da Biltz [5].

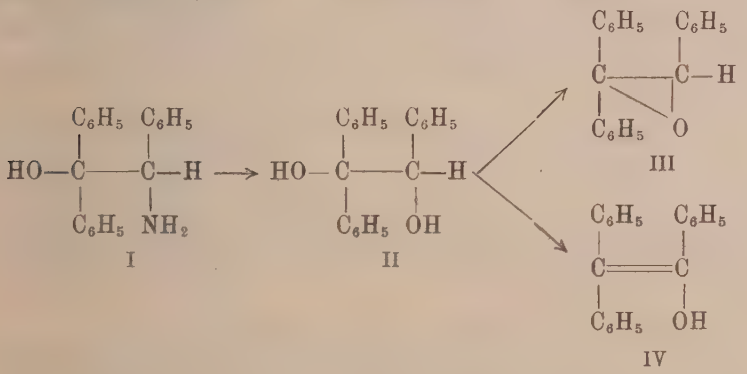
Il prof. Paternò e Forlì-Forti [6] l'ottennero pure riscaldando con alcool in tubi chiusi a 200° il monoacetato del trifenil-glicol, preparato per azione della luce sopra una mescolanza di benzofenone ed acetato di benzile.

Ho potuto confermare che la sostanza da me preparata è veramente identica a tale prodotto di disidratazione del trifenil-glicol, facendone, col metodo descritto da Biltz, *l'acetil derivato*, per riscaldamento con anidride acetica ed acetato sodico. Ho ottenuto così un prodotto, che cristallizzato da acido acetico diluito, fonde a 101-103°, identico a quello descritto da Biltz

(1) Gardeur, Bl. de l'Acad. Belgique (3) *54*, 92 (1897).
(2) Klingermann A., *275*, 88 (1893).
(3) Delacre, Bl. (3) *15*, 889 (1896).
(4) Collet, Bl. (3) *15*, 22 (1896).
(5) Biltz, B. *26*, 1957 (1893) e A. *296*, 242 (1897).
(6) Paternò e Forlì-Forti, Gaz. Ch. It., *40* (2) 332 (1910).

e identico a quello che il prof. Paternò aveva preparato dal mono-acetato del trifenil-glicol riscaldandolo con cloruro di acetile in presenza di acido acetico.

La formazione di questo prodotto di disidratazione del trifenil-glicol sta a dimostrare che veramente la benzilammina per azione della luce reagisce col benzofenone in maniera analoga a quella con cui reagiscono l'alcool benzilico e l'acetato di benzile. Il gruppo CH_2 della benzilammina reagisce cioè col CO del benzofenone dando luogo ad una condensazione enolica. Soltanto ammettendo la formula (I) per il composto che si ottiene dalla benzilammina e benzofenone si può spiegare la formazione, da me osservata, del trifenil-glicol (II) e per esso del suo prodotto di disidratazione, sia esso da considerarsi come ossido di trifenil-etilene (III), sia come trifenil-vinil-alcool (IV) (probabilmente, come fece notare il prof. Paternò, si tratta di un caso di tautomeria)



In successivi trattamenti della sostanza con nitrito sodico, ho provato a variare le condizioni di esperienza, facendo la reazione in presenza di acido acetico più o meno diluito, aggiungendo o no qualche goccia di acido solforico e facendo bollire più o meno a lungo. Ho sempre ottenuto la medesima sostanza fusibile a 134-136°; solo qualche volta ho potuto isolare dei prodotti secondarî della reazione, ma in quantità così piccola da essere insufficiente per l'analisi.

Così potei separare un prodotto che, cristallizzato da molto alcool bollente, si presenta in aghetti bianchi piccolissimi che fondono a 217-219°; forse è indentico al mono-acetil-derivato del trifenil-glicol ottenuto dal prof. Paternò, per azione della luce sul miscuglio di benzofenone e acetato di benzile.

Altre volte ho potuto isolare una sostanza che cristallizza pure dall'alcool in magnifici aghetti bianchi splendenti che fondono a 232-233°; nell'insieme dei suoi caratteri sembra identica all'idrocarburo fusibile a 233° descritto da Biltz.

Ma non ho creduto necessario di continuare lo studio di questi prodotti secondarî che nessun nuovo contributo avrebbero portato al problema che ho risolto con la identificazione della sostanza fusibile a 134-136°, tanto più che, colle esperienze sopra descritte, ho finito tutto il prodotto che avevo a disposizione e per averne dell'altro avrei dovuto aspettare molto tempo.

Fisiologia vegetale. — *Ancora sull'azione degli ammoniocomposti sul germogliamento dell'Avena sativa.* Nota del dott. F. Plate, presentata dal Socio R. Pirotta.

In una mia precedente Nota comparsa nell'ultimo ottobre, io studiavo l'azione di soluzioni di nitrato di ammonio sull'*Avena sativa*. Parevami opportuno di confrontare il comportamento di soluzioni normali, rispetto allo sviluppo delle piantine, con soluzioni contenenti pesi variabili di sostanze riferiti a 100 gr. di acqua, le quali ultime soluzioni io chiamerò, per brevità, percentuali.

Facevo quindi il raffronto fra i risultati ottenuti con le soluzioni normali e percentuali adoperate, mettendo in apposite tabelle il contenuto in azoto dei due casi. Ora accadde in questa Nota una deplorevole confusione tipografica, per la quale, specialmente alla pagina 293, manca completamente il senso scientifico, come il lettore avrà potuto facilmente rilevare (1).

Riprendo adunque l'argomento nella presente Nota.

Le soluzioni normali e percentuali di $NO_3\,NH_4$, stante la deliquescenza di questo sale, furono preparate rispettivamente sciogliendo in un litro di H_2O un peso di sale puro (Kahlbaum), un poco superiore al necessario. Venne stabilito il titolo della soluzione distillando da un dato volume l'NH_3 e titolando quest'ultima. Con la quantità d'H_2O calcolata, la soluzione stessa fu diluita per riportarsi alla esatta concentrazione normale e percentuale. Il contenuto quindi in azoto totale per il $NO_3\,NH_4$ era, per ogni litro di soluzione normale, la seguente:

$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$
0.5604	0.2802	0.1401	0.0700	0.0350	0.0175	0.0087

e per il $Cl\,NH_4$ l'azoto ammoniacale era:

$^N/_{50}$	$^N/_{100}$	$^N/_{200}$	$^N/_{400}$	$^N/_{800}$	$^N/_{1600}$	$^N/_{3200}$
0.2802	0.1401	0.0700	0.0350	0.0175	0.0087	0.0043

(1) Il manoscritto di quella Nota era irto di correzioni e aggiunte; trovandomi nei mesi estivi in vacanza, le bozze furono restituite senza essere da me viste, d'onde la enorme confusione per cui alcuni periodi e tabelle furono saltati, ed altri posposti.

A causa dell'azoto del gruppo NO_3, la quantità di azoto totale esistente nel $NO_3\ NH_4$ è naturalmente doppia della quantità di azoto esistente nella corrispondente soluzione normale di $Cl\ NH_4$.

Nelle soluzioni percentuali di $NO_3\ NH_4$ abbiamo invece le seguenti quantità di azoto totale per ogni litro:

2 °/₀₀	1 °/₀₀	0.5 °/₀₀	0.25 °/₀₀	0.125 °/₀₀	0.0625 °/₀₀	0.0312 °/₀₀
0.7004	0.3502	0.1751	0.0875	0.0437	0.0218	0.0109

e per il $Cl\ NH_4$ l'azoto totale era:

2 °/₀₀	1 °/₀₀	0 5 °/₀₀	0.25 °/₀₀	0.125 °/₀₀	0.0625 °/₀₀	0.0312 °/₀₀
0.5242	0.2621	0.1310	0.0655	0.0327	0.0163	0.0081

Ora la quantità d'azoto totale esistente nella soluzione percentuale del nitrato d'ammonio, a causa del gruppo NO_3, è maggiore della quantità esistente nella corrispondente soluzione percentuale di $Cl\ NH_4$, ma non doppia come nel caso delle soluzioni normali. Mentre poi, viceversa, la quantità dell'azoto ammoniacale esistente nelle corrispondenti soluzioni percentuali è maggiore per il cloruro d'ammonio che non per il nitrato d'ammonio. Infatti abbiamo che per il $NO_3\ NH_4$ l'azoto ammoniacale è contenuto in ogni litro nelle seguenti quantità:

2 °/₀₀	1 °/₀₀	0.5 °/₀₀	0.25 °/₀₀	0.125 °/₀₀	0.0625 °/₀₀	0.0312 °/₀₀
0.35012	0.1751	0.0875	0.0437	0 0218	0.0109	0.0054

mentre che per il $Cl\ NH_4$ è contenuto in queste altre quantità:

2 °/₀₀	1 °/₀₀	0.5 °/₀₀	0.25 °/₀₀	0.125 °/₀₀	0.625 °/₀₀	0.0312 °/₀₀
0.5242	0.2621	0.1310	0.0655	0.0327	0.0163	0.0081

Ed è appunto di questo diverso contenuto in azoto che mi sono voluto servire per potere meglio studiare l'azione degli ammoniocomposti sul ciclo di sviluppo della *Avena sativa*, e stabilire così un termine di confronto fra i risultati ottenuti con una serie di esperienze e quelli ottenuti con l'altra.

In due altre mie Note precedenti (1) ho accennato appunto ai risultati diversi che si hanno sul germogliamento delle piantine di Avena, quando si adopera il nitrato d'ammonio e quando il cloruro. Ora, usando soluzioni normali, mentre con il primo di questi sali le piantine vengono ad essere molto danneggiate, con il cloruro d'ammonio ciò non avviene, ed anzi le piantine continuano a crescere rigogliose. Quindi trovandoci, in un caso, in presenza d'una quantità doppia d'azoto, e, in un altro, del solo azoto ammoniacale, l'azione nociva del $NO_3\ NH_4$ si può probabilmente riferire a due cause: o ad un eccesso di azoto, oppure a cause di natura fisico-chimica.

(1) Questi Rendiconti. vol. XXIII, 2° sem. 1914, pagg. 166 e 234.

Giunto a questo punto volli vedere se usando invece le soluzioni percentuali sopradette, i risultati ne sarebbero stati i medesimi. In una prima serie di esperienze i risultati non sarebbero molto diversi da quelli ottenuti per le soluzioni normali; epperò mi occorre ancora di approfondire meglio la questione, per cui ritornerò a suo tempo su questo argomento.

Come in tutti i miei precedenti lavori sperimentali, io ho fatto sempre uso di soluzioni normali, anzichè di soluzioni che chiamai percentuali, rispondendo questo concetto indubbiamente meglio al rigore scientifico da usare in simili ricerche. Ma credo che qualche volta possa tornare utile di stabilire confronti con i risultati ottenuti per mezzo di soluzioni percentuali.

Così ho creduto opportuno, in questa Nota ulteriore, di chiarire meglio il mio concetto, riparando alla involontaria confusione avvenuta, per le ragioni suddette, nella Nota precedente, e di indicare il metodo che intendo seguire nelle indagini già intraprese.

Chimica. — *Sul metabolismo degli aminoacidi nell'organismo.* Nota II: *Azione del tessuto muscolare sugli aminoacidi aggiunti al liquido di Ringer circolante*, del dott. Ugo Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani.

Abbiamo nella precedente Nota dimostrato che, facendo circolare aminoacidi col sangue nel tessuto muscolare di un arto di cane, si ottiene una loro diminuzione nel liquido circolante.

Una parte degli aminoacidi scomparsi dal liquido viene ritrovata nel tessuto muscolare, il quale (come aveva osservato v. Slyke *in vivo*) se ne satura. Del quantitativo che ancora rimane per colmare il *deficit*, una parte, che però dalle nostre ricerche, non appare molto cospicua, viene bruciata, come si può desumere dall'aumento dell'NH_3 del sangue; dell'altra parte non possiamo in altro modo giustificare l'assenza se non ammettendo una sintesi degli aminoacidi, in sostanze più complesse non titolabili col formolo.

Questi risultati apparivano in contrasto con quanto era stato descritto dal Buglia a proposito della circolazione artificiale del cuore di coniglio con liquido di Ringer ed aminoacidi.

In tali esperienze l'autore non avrebbe mai ottenuto una diminuzione di aminoacidi dal liquido, ma al contrario, in qualche caso, un lieve aumento dovuto al versamento, nel liquido, degli aminoacidi del tessuto cardiaco.

Molte potevano essere le ragioni invocate a spiegare questa differenza di risultati: ad esempio la particolare natura del tessuto muscolare cardiaco la varia specie di animali, ecc., ecc.

Fra le varie ragioni, la più importante e degna di essere presa in immediato esame mi parve fosse quella che la divergenza in questione attribuiva all'avere io adoperato sangue in luogo di liquido di Ringer.

Come è stato dimostrato, per la formazione dell'acido ippurico nel rene, che soltanto con l'intervento del sangue è possibile la sintesi della glicocolla con l'acido benzoico, così potevasi supporre che anche nel muscolo la sintesi o la distruzione degli aminoacidi non si potesse compiere senza la partecipazione del sangue.

Perciò ho creduto opportuno di ripetere le esperienze già da me fatte sulla circolazione di aminoacidi nel muscolo di cane, sostituendo al sangue il liquido di Ringer.

In una parte di queste ricerche ho semplicemente determinato la quantità di aminoacidi presenti nel liquido prima e dopo la circolazione, nella presunzione di ottenere un risultato simile a quello del Buglia (ottenendo il quale, rimanevano quindi inutili ulteriori ricerche). Ma avendo constatato la diminuzione degli aminoacidi, alcune volte assai notevole, volli meglio determinare il destino di questi aminoacidi scomparsi, e quindi estesi le ricerche al tessuto muscolare, ed al contenuto in NH_3 del liquido e del muscolo.

I.

Cane femmina, kg. 3,800 — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione, gr. 215. Soluzione di Ringer adoperata, cc. 400 + 4 gr. glicocolla ; pressione media 140-180 mm. mercurio. Durata della circolazione, 2 ore circa. Peso dell'arto dopo la circolazione, gr. 320.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 12,6 cc. Na OH $/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 11,6 » »

II.

Cane maschio, kg. 4,600. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 245. Soluzione di Ringer adoperata 450 cc. + 4 gr. di α alanina; pressione media 100-140 mm. mercurio. Durata della circolazione 1 ora e mezza. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 350.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 6,9 » »

III.

Cane maschio, kg. 6,500. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 355. Soluzione di Ringer adoperata cc. 500 + 4 gr. asparagina (neutralizzata). Pressione media 110-150 mm. mercurio. Durata della circolazione ore 1 e un quarto. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 503.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 4,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 4,2 » »

IV.

Cane femmina, kg. 7,400. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 420. Soluzione di Ringer adoperata cc. 500 + 4 gr. glicocolla. Pressione media 140-160 mm. mercurio. Durata della circolazione ore 1 e mezzo. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 645.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 10,2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 8,4 » »

Non riferisco altre esperienze limitate alla semplice indagine sul contenuto in aminoacidi, del sangue nutritizio prima e dopo la circolazione nel tessuto muscolare; bastano questi esempî per indicare come si ottenga sempre, ed in misura più o meno cospicua, una loro diminuzione.

Emerge pure, da queste prime osservazioni, che si produce rapidamente durante la circolazione un edema assai cospicuo; tale da raddoppiare persino il peso dell'arto in esperimento; una gran parte del liquido viene quindi in tal modo sottratta.

Perciò riusciva tanto più importante di indagare il contenuto in aminoacidi nel tessuto muscolare prima e dopo la circolazione.

Ma a tale proposito si incontra una difficoltà nel prelevare i campioni del tessuto muscolare dopo la circolazione, perchè la percentuale degli aminoacidi non è omogenea ma si rivela più elevata nel liquido dell'edema che non nel tessuto muscolare.

Avendo io nelle prime ricerche avvertito in qualche caso risultati che parevano paradossali, ho cercato invece di sfuggire a questo inconveniente col prelevare proporzionalmente i campioni dei due elementi (muscolo ed edema); ed infine in una esperienza ho determinato il contenuto in aminoacidi dell'intero arto (escluso, naturalmente, il tessuto osseo).

Riferisco anzitutto due esperienze, nella prima delle quali il contenuto in aminoacidi dopo la circolazione fu desunte dall'esame del tessuto muscolare deterso con cura dall'edema, e nella seconda, invece, dall'esame del liquido edematoso.

V.

Cane maschio, kg. 5,200. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 290. Soluzione di Ringer adoperata cc. 410 + 4 gr. glicocolla. Pressione media 120-150 mm. mercurio. Durata della circolazione 2 ore. Peso dell'arto alla fine della circolazione gr. 530.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 11.3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9 » »
Per 30 gr. di muscolo la formoltitolazione richiede . . 6,4 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 15,8 » »

Complessivamente, nel liquido rimasto dopo la circolazione si richiedono per la formoltitolazione 322 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si conterrebbero, in più del normale, tanti aminoacidi da corrispondere a 195,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*. Risulterebbe quindi un *deficit* assoluto di 126,7 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VI.

Cane femmina, kg. 4. — Peso dell'arto sottoposto a circolazione gr. 225. Soluzione di Ringer adoperata 400 cc. + 4 gr. glicocolla. Pressione media 120-140 mm. mercurio. Durata della circolazione ore 1 e mezza. Peso dell'arto dopo la circolazione gr. 340.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 11,5 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9,3 » »
Per 50 gr. di muscolo normale » » 8,2 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» (cc.) edema » » 40,5 » »

Complessivamente, nel liquido rimasto dopo la circolazione si richiede per la formoltitolazione 135 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, la formoltitolazione richiede 210 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in più del normale. Risulterebbe quindi un eccesso assoluto di 75 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VII.

Cane maschio, kg. 5,700. — Peso dell'arto sottoposto a circolazione, gr. 340 (tessuto osseo gr. 85). Soluzione di Ringer adoperata 525 cc. + 2 gr. asparagina neutralizzata. Pressione media 13-15 mm. mercurio. Durata della circolazione, 1 ora. Peso dell'arto alla fine della circolazione, gr. 495.

Per 15 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 7 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 6,5 » »
Per 50 gr. di muscolo normale » » 17 cc. Na OH $^1/_{1^0}$ *n*
» » dopo circolaz. » » 20 » »
NH_3 per 100 cc. soluzione dopo la circolaz. corrispondono a 2,5 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*
» 50 gr. muscolo normale » » 15 » »
» » » dopo la circolaz. » 12 » »

Complessivamente si trovano nel liquido, dopo la circolazione, tanti aminoacidi da corrispondere a 85,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si trovano tanti aminoacidi da corrispondere a 77,3 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in più del normale. Il *deficit* assoluto sarebbe quindi di 7,8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

VIII.

Cane maschio, kg. 8. — Peso dell'arto sottoposto a circolazione, gr. 480 (tessuto osseo gr. 120). Soluzione di Ringer adoperata, cc. 500 + 4 gr. alanina. Pressione media 130-160 mm. mercurio. Durata della circolazione 2 ore. Peso dell'arto alla fine della circolazione, gr. .

Per 15 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 20,7 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 9,6 » »
Per 50 gr. di muscolo » » 10 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*
» » dopo circolaz. » » 17,6 » »

Complessivamente si trovano nel liquido dopo, la circolazione, tanti aminoacidi da corrispondere a 118 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si trovano tanti aminoacidi da corrispondere a 106,1 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in più del normale. Il *deficit* assoluto sarebbe quindi di 11,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

IX.

Cane maschio, kg 3,200. — Peso dell'arto sottoposto alla circolazione gr. 215 (tessuto osseo gr. 55). Soluzione di Ringer adoperata cc. 400 + 4 gr. glicocolla. Pressione

media 100-130 mm. mercurio. Durata della circolazione, ore 1 e mezza. Peso dell'arto dopo la circolazione, gr. 320.

Per 10 cc. di soluzione la formoltitolazione richiede . . 12,6 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » » dopo circolaz. la formoltitolaz. richiede 11,7 » »

Nella totalità del muscolo normale » » 20.8 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*

» » dopo circolaz. a » 170,9 » »

NH_3 per 100 cc. soluzione dopo la circolaz. corrispond. a 7 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$ *n*

Complessivamente si trovano nel liquido, dopo la circolazione, tanti aminoacidi da corrispondere a 156 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in meno. Nel muscolo, dopo la circolazione, si trovano tanti aminoacidi da corrispondere a 150 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n* in più del normale. Il *deficit* assoluto sarebbe quindi di 5,9 cc. Na OH $^1/_{10}$ *n*.

Dalle esperienze esposte risulta che:

1) Facendo circolare nel tessuto muscolare aminoacidi sciolti in liquido di Ringer, si ottiene sempre una più o meno notevole diminuzione del contenuto in aminoacidi del liquido nutritizio, diminuzione che raggiunge persino il 12 %.

2) Oltre alla diminuzione percentuale degli aminoacidi nel liquido circolante nel tessuto muscolare, si ha pure una diminuzione nella quantità del liquido stesso, per l'insorgere di un cospicuo edema. Sommando la perdita di amicoacidi dovuta, sia alla diminuzione percentuale nel liquido *residuo*, sia alla diminuzione del liquido *in toto*, si avrebbe una perdita di aminoacidi che supera persino il 50 %.

3) Se si determina il contenuto in aminoacidi del tessuto muscolare prima e dopo la circolazione, si avverte che pressochè tutti gli aminoacidi scomparsi si ritrovano depositati nel tessuto.

Non si tratta quindi di una ulteriore utilizzazione degli aminoacidi per processi combustivi o sintetici, ma di una semplice loro deposizione.

Quella piccolissima percentuale, meno dell'1-2 %, di aminoacidi che non si ritrovano nel tessuto muscolare (e che potrebbe rientrare nei limiti di errore del metodo usato per la determinazione, o che potrebbe esser stato sottratto al tessuto osseo), può forse indicare una avvenuta combustione.

Infatti nel liquido nutritizio, dopo la circolazione, abbiamo sempre trovato piccole quantità di NH_3.

Ma non è possibile di formulare in proposito alcuna recisa affermazione, perchè non abbiamo seguìto con sufficiente esattezza il contenuto in NH_3 del muscolo, che abbiamo dosato nell'estratto idro-alcoolico del muscolo previamente essiccato e triturato.

Rimandando al risultato di ulteriori ricerche il giudizio se, concordemente all'affermazione di Buglia, il muscolo perfuso con soluzione di Ringer sia del tutto incapace di distruggere gli aminoacidi, o invece se esso compia in lievissimo grado tale ufficio, questo per ora si può affermare:

che durante la perfusione del muscolo con soluzione di Ringer ed aminoacidi, una gran parte di questi viene sottratta al liquido circolante.

Ma in luogo di venir utilizzati, essi si depositano nella totalità, o nella massima loro parte nel tessuto; mentre, invece, durante la circolazione con sangue, pur osservandosi sempre in cospicua misura il fenomeno del semplice depositarsi di aminoacidi, si ottiene anche la loro combustione ed una loro trasformazione in sostanze non titolabili al formolo.

Matematica. — *Sulle superficie di Riemann multiple, prive di punti di diramazione.* Nota del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques.

1. Se sopra una funzione razionale dei punti di una curva algebrica di genere p,

$$\psi(x, z) = 0,$$

si estrae una radice *n-esima*

$$y = \sqrt[n]{f(x, z)},$$

si ottengono famiglie di funzioni y birazionalmente distinte, corrispondentemente ai sistemi di sostituzioni secondo cui si permutano gli n valori di y quando il punto (x, z) descrive uno dei $2p$ cicli riemanniani della ψ, o gira attorno a uno zero di $f(x, z)$; questo, in generale, è uno zero semplice, e costituisce un punto di diramazione, un giro intorno ad esso producendo su y la moltiplicazione per $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Gli zeri della f possono però non essere punti di diramazione, e risultare punti critici apparenti, e ciò quando essi siano zeri d'ordine n, cioè quando le curve $f = 0$ e $\psi = 0$ abbiano un contatto n-punto. Nel caso in cui manchino i punti di diramazione, le famiglie di funzioni $y = \sqrt[n]{f(x, z)}$ dipendono soltanto dalle sostituzioni S_i relative ai $2p$ cicli riemanniani della ψ: ora queste sostituzioni devono, evidentemente, essere una potenza della sostituzione circolare $(1, 2 \ldots, n)$ e, del resto, possono essere arbitrarie, esistendo effettivamente funzioni y per un sistema qualunque di sostituzioni S_i [1]: ne segue che le famiglie di funzioni y sono in numero di n^{2p}, comprese quelle riducibili per le quali il gruppo delle S_i non sia transitivo.

Ora, *scopo di questa Nota è di costruire effettivamente le funzioni* $y = \sqrt[n]{f(x, z)}$ *prive di punti di diramazione sulla* ψ, *per le quali sia dato « a priori » il sistema delle sostituzioni* S_i: a ciò si arriva con *consi-*

[1] Cfr. Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 39: *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, pag. 55.

derazioni essenzialmente *topologiche*, assegnando in funzione delle S_i la serie lineare cui appartiene il gruppo dei punti critici apparenti. Si ritrova, così, che questa serie determina la famiglia delle funzioni y, cosa già dimostrata per via algebrica da A. Comessatti [1] nel caso di $n = 2$.

2. Esporrò qui, discorsivamente, il filo delle mie considerazioni, rimandando alla fine (§ 3) della presente Nota per la dimostrazione di alcune proposizioni che verranno momentaneamente ammesse, e ciò per rendere più chiaro lo svolgersi del ragionamento.

Supponiamo che la curva $\psi = 0$ sia dotata solo di punti doppî a tangenti distinte (caso a cui si può sempre ridurre con una conveniente trasformazione birazionale), e indichiamo con Ψ la riemanniana della curva stessa.

Assumiamo come modello della Ψ una sfera con p manici, e su essa prendiamo come sistema dei cicli riemanniani C_i il sistema delle $2p$ retrosezioni A_i e B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ [2].

Se la funzione $y = \sqrt[n]{f(x, z)}$ non ha punti di diramazione sulla Ψ, occorrerà, come già abbiamo ricordato, che la curva $f = 0$ abbia un contatto n-punto, ovunque essa intersechi la $\psi = 0$; conviene però esaminare come si comporti la f nei punti doppî della ψ ad essa comuni. Precisamente, se la f passa per un punto D doppio per la ψ (a cui corrispondono due punti sulla Ψ), essa dovrà avere n intersezioni riunite con ciascuno dei due rami della ψ, e pertanto dovrà avere come doppio (almeno) il punto D, e ciascuno dei suoi rami dovrà avere un contatto, con i rami della ψ, di ordine $n - 2$, se il punto D è solo doppio per la f; d'ordine $n - r$, se il punto è *r-plo*.

Veniamo ora alla costruzione del polinomio $f(x, z)$, tale che gli n valori della funzione

$$y = \sqrt[n]{f(x, z)},$$

priva di punti di diramazione sulla Ψ, si permutino secondo sostituzioni

$$S_i = (1, 2, \ldots, n)^{\alpha_i}$$

assegnate, quando il punto (x, z) descrive un ciclo C_i della Ψ.

Per comodità cercheremo la curva $f(x, z)$, soddisfacente alle nostre condizioni, fra le curve di un ordine nr abbastanza elevato, passanti per ogni punto doppio della ψ ed aventi n intersezioni riunite con ciascuno dei rami della ψ uscenti dal punto medesimo: indicheremo con f queste curve.

[1] *Sulle curve doppie di genere qualunque*, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino, ser. II, tom. LX.

[2] Cfr., per esempio, F. Severi, *Lezioni di geometria algebrica*. Tip. Draghi, Padova 1908, pag. 269.

Essendo nr abbastanza elevato esisteranno certo delle f le quali abbiano un contatto n-punto in ogni loro intersezione con la curva ψ: indico con $\bar{f}$ le curve soddisfacenti a questa ulteriore condizione, e con q il numero dei punti in cui esse osculano la ψ fuori dei suoi punti doppî, e che, insieme con i punti doppî contati due volte, formano il gruppo dei punti critici apparenti per le funzioni

$$y = \sqrt[n]{f(x, z)}.$$

Sussiste anzitutto il

Teorema: *se due curve* $\bar{f}_0$ *e* $\bar{f}_1$ *toccano la curva* ψ *in punti* (fuori dei punti doppî) *di due gruppi* G_0 e G_1 *equivalenti, esse dànno luogo alle medesime sostituzioni* S_i, *e quindi a funzioni* y *birazionalmente identiche.*

La dimostrazione di questo teorema si fa osservando che si può passare con continuità [cfr. § 3, *a*)] dalla curva $\bar{f}_0$ alla $\bar{f}_1$ muovendosi nella famiglia delle curve $\bar{f}$, e che durante questo passaggio il sistema delle sostituzioni S_i non può venire modificato.

Invece non è possibile di passare per continuità, movendosi entro la famiglia delle curve $\bar{f}$, da una curva $\bar{f}_0$ a un'altra $\bar{f}_1$, corrispondenti a diversi sistemi di sostituzioni S_i. Questo passaggio diventa però possibile quando si muova nella famiglia delle curve f', data da quelle curve f le quali abbiano, con la ψ, non più q intersezioni *n-ple*, ma $q - 1$ punti R_k d'intersezione *n-pla*, un punto Q d'intersezione $(n-1)$-*pla*, e un punto P d'intersezione semplice: le curve $\bar{f}_0$ ed $\bar{f}_1$ apparendo così particolari curve f' per le quali P e Q coincidono.

Precisamente noi faremo il passaggio effettivo da una curva $\bar{f}_0$, per la quale tutte le S_i siano l'identità, a una curva $\bar{f}_1$ per la quale il sistema delle S_i sia un sistema prefissato: e in questo modo determineremo quale è la serie a cui appartiene il gruppo G_1 dei punti in cui la $\bar{f}_1$ oscula la ψ, cioè il gruppo dei punti critici apparenti della

$$y = \sqrt[n]{\bar{f}_1(x, z)};$$

in questo ci gioveremo essenzialmente del fatto che le curve f' dànno funzioni

$$y = \sqrt[n]{\bar{f}_1(x, z)},$$

dotate di due punti P e Q di diramazione.

Consideriamo adunque la curva

$$\bar{f}_0(x, z) = \varphi^n(x, z) = 0,$$

dove $\varphi = 0$ rappresenta una curva d'ordine r passante per i punti doppî di ψ.

La funzione

$$y = \sqrt[n]{\varphi^n(x\,,\,z)}$$

si spezza evidentemente in n funzioni: per essa, quindi, ogni sostituzione S_i è l'identità.

Si ottiene ora una funzione

$$y = \sqrt[n]{f_1(x\,,\,z)}$$

i cui rami $y_1\,,\,y_2\,,\,\ldots\,,\,y_n$ (dove $y_s = e^{\frac{2\pi i}{n}}\,y_{s-1}$), si permutano secondo sostituzioni prefissate

$$S_i = (1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n)^{\alpha_i}\,,$$

nel modo seguente:

Si osservi anzitutto che la curva $f_0 = \varphi^n$ è una curva f_0' in cui i punti P e Q coincidono.

Facciamo variare la f_0' nella famiglia delle f' lasciando fisso il punto Q [che è un'intersezione $(n-1)$-*pla* di f' e ψ], facendo descrivere al punto P (che è un'intersezione semplice) un cammino chiuso C, e lasciando variare comunque i punti R_k (che sono intersezioni *n-ple*): si otterrà infine una curva f' per la quale i punti P e Q coincidono, la quale è quindi una curva f_1 che dà luogo a una funzione

$$y = \sqrt[n]{f_1(x\,,\,z)}$$

priva di punti di diramazione.

È facile ora determinare quale deve essere il cammino chiuso C perchè la $y = \sqrt[n]{f_1(x\,,\,z)}$ ammetta un dato sistema di sostituzioni S_i. A tale oggetto, definiamo il senso positivo per i cicli nulli, e per quelli costituiti dalle retrosezioni A_i e B_i. Per i cicli nulli assumiamo come senso positivo quello contrario alle lancette dell'orologio: per il ciclo B_i un senso qualunque, e per il ciclo A_i un senso tale che un punto P, che descriva A_i, tagli B_i passando dalla sinistra alla destra.

Ora esserviamo che quando, al variare della f', il punto P, percorrendo *negativamente* una retrosezione A_i, taglia il ciclo costituito dalla retrosezione coniugata B_i, questo ciclo B_i viene a sommare un ciclo nullo che avvolge P in senso *positivo*; e pertanto, se il ciclo B_i, prima di essere attraversato, corrispondeva alla sostituzione $(1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n)^r$ per la $y = \sqrt[n]{f'}$, dopo corrisponderà alla sostituzione $(1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n)^{r+1}$.

Si noti, ora, che ogni ciclo A_i taglia in un punto il ciclo B_i, e non taglia nessuno degli altri cicli: pertanto, se i rami della nostra funzione $y = \sqrt[n]{f_1(x, z)}$ debbono permutarsi secondo le sostituzioni

$$S_{a_i} = (1, 2, \dots, n)^{\alpha_i}$$
$$S_{b_i} = (1, 2, \dots, n)^{\beta_i}$$

quando il punto (x, z) descrive rispettivamente le retrosezioni A_i e B_i, dovrà essere

$$C = \Sigma - \alpha_i B_i + \Sigma - \beta_i A_i .$$

Vediamo ora quale sia la serie cui appartiene il gruppo G_1 dei punti in cui la f_1 oscula ψ. Supponiamo che la serie segata sopra la ψ dalle curve φ, passanti per i punti doppî della ψ, sia definita dalle p relazioni

$$\Sigma U_h(a_s) \equiv 0 , \qquad (h = 1, 2, \dots, p)$$

dove $U_h(a_s)$ indica uno dei p integrali abeliani di prima specie, calcolato in uno dei punti a_s della serie stessa, e dove il segno $\equiv$ indica la congruenza rispetto ai periodi degli integrali stessi.

Se indichiamo con

$$\omega_{a_i}^{(h)} \quad \text{e} \quad \omega_{b_i}^{(h)}$$

i periodi dell'integrale U_h relativi ai cicli A_i e B_i, avremo che la serie cui appartiene G_1 è definita dalle p relazioni

$$\Sigma U_h \equiv \Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n}$$

(dove $h = 1, 2, \dots, p$) [cfr. § 3, *b*)].

Pertanto, *se si vuole che la funzione*

$$y = \sqrt[n]{f_1(x, z)}$$

ammetta come sistema di sostituzioni S *le sostituzioni*

$$S_{a_i} = (1, 2, \dots, n)^{\alpha_i}$$
$$S_{b_i} = (1, 2, \dots, n)^{\beta_i} ,$$

occorre prendere il gruppo G_1 *dei suoi punti critici apparenti entro la serie definita dalle p relazioni*

$$\Sigma U_h \equiv \Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n} .$$

3. Dimostriamo ora le due proposizioni *a*) e *b*) ammesse nel § 2.

a) Per dimostrare che si può passare con continuità dalla $\overline{f}_0$ alla $\overline{f}_1$ muovendosi entro la famiglia delle $\overline{f}$, nell'ipotesi che i due gruppi dei punti di contatto G_0 e G_1 siano equivalenti, basta osservare che la serie segata dalle curve f (fuori dei punti doppî di ψ) è *completa*, e, pertanto, ogni gruppo equivalente a G_0, contato n volte, dà un gruppo segato da una f, e quindi è costituito dai punti di contatto n-punto di una $\overline{f}$.

Pertanto, potendosi passare con continuità da G_0 a G_1 entro la serie lineare che li contiene, si può passare per continuità da $\overline{f}_0$ a $\overline{f}_1$ entro la famiglia delle curve $\overline{f}$.

b) Per dimostrare che $U_h(G_1)$, somma degli integrali U_h abeliani calcolati nei punti di G_1, è congrua, rispetto ai periodi, a

$$\Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n},$$

ricordiamoci che G_1 è ottenuto partendo da G_0, facendo percorrere a P il ciclo

$$C = \Sigma - \alpha_i B_i + \Sigma - \beta_i A_i,$$

e che i gruppi $n G_0$ ed $n G_1$ sono equivalenti, e sono inoltre equivalenti al gruppo variabile formato da

$$P + (n-1) Q + n \Sigma R_h.$$

Teniamo presente il teorema d'Abel il quale dice che: condizione perchè due gruppi siano equivalenti, è che siano uguali le somme degli integrali abeliani nei gruppi stessi; osserviamo, poi, che, quando P descrive C, la somma degli integrali abeliani U_h, calcolata in P, diminuisce di

$$\Sigma \alpha_i \omega_{b_i}^{(h)} + \Sigma \beta_i \omega_{a_i}^{(h)};$$

quindi, restando Q fisso, la somma degli integrali U_h calcolati nei punti R_h deve aumentare di

$$\Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{n};$$

pertanto, essendo

$$U_h(G_0) \equiv 0,$$

è

$$U_h(G_1) \equiv \Sigma \alpha_i \frac{\omega_{b_i}^{(h)}}{n} + \Sigma \beta_i \frac{\omega_{a_i}^{(h)}}{u}.$$

c. d. d.

Cristallografia. — *Sopra alcuni cristalli di gesso artificiale* (1). Nota di C. Perrier, presentata dal Socio G. Struever.

Il metodo più semplice per ottenere artificialmente cristalli di gesso, consiste, come è noto, nel concentrare le acque che lo contengono in soluzione. Sovente il gesso in natura deve la sua formazione all'azione dell'acido solforico e dei solfati metallici solubili sopra le roccie calcaree ed eventualmente sopra i silicati che contengono calcio. Acido solforico e solfati metallici si formano spesso nell'alterazione dei solfuri e specialmente in quella della pirite e della marcassite, che acquista una particolare importanza per la grande diffusione di questi due minerali.

È noto infatti come la concomitante azione dell'ossigeno e dell'acqua alterino la pirite con produzione di solfato ferroso e di acido solforico; le acque filtranti, che hanno lisciviato questi prodotti, attaccano facilmente i calcari trasformandoli in gesso, e questa azione è poi resa tanto più facile in quanto che, l'ossigeno agendo ulteriormente sul $FeSO_4$, la trasforma in solfato ferrico, che, facilissimamente idrolizzandosi, produce nuovo H_2SO_4.

Nel riordinare il Museo e l'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, fu rinvenuto un frammento di calcare, sul quale erano impiantati dei nitidi cristallini di gesso. Un'etichetta, di mano del compianto prof. Spezia, indicava che quel calcare era rimasto per due anni immerso in una soluzione di solfato ferroso: evidentemente, il prof. Spezia aveva voluto imitare la formazione del gesso come si verifica in certi casi in seguito all'alterazione della pirite. I cristalli ottenuti, grandi e belli, non sono mai stati studiati; interessante appariva invece il loro esame cristallografico, non soltanto per stabilire quali sono le forme cristalline che si originano in quelle particolari e ben definite condizioni di formazione, ma anche perchè alcuni di quei cristalli presentavano delle facce che già ad occhio nudo apparivano diverse da quelle comuni del minerale.

I cristalli si trovavano sulla massa di calcare, parzialmente arrossata per deposito di idrato ferrico, parte impiantati per l'asse delle z, parte invece poggianti per una faccia di $\{010\}$.

Essi sono piuttosto allungati secondo l'asse delle z, raggiungendo talora, in questa direzione, anche 1 cm. di lunghezza; e si presentano sempre tabulari secondo $\{010\}$. Generalmente i cristalli sono incolori e trasparenti; su alcuni, però, verso l'estremità libera si osserva un esilissimo deposito granulare di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. F. Zambonini. Dicembre, 1914.

una sostanza nera costituita da un sale ferrico, del quale però, per la troppo esigua quantità disponibile, non potei identificare la natura.

Io ho misurato parecchi cristallini, determinando le seguenti forme:

$$b\{010\},\ m\{110\},\ l\{111\},\ y\{131\},\ \pi\{113\}^*,\ \mu\{553\}^*;$$

delle quali, la π e la μ sono nuove per il minerale.

Le combinazioni osservate sono solamente due:

1) b, m, l;

2) b, m, y, π, μ.

Di gran lunga più frequente è la prima combinazione, nella quale si rinvengono solamente le solite e comunissime forme del gesso; b è sempre molto grande e striata parallelamente a z, come pure sempre striate nella stessa direzione sono le faccie di m: esse permettono tuttavia misure discrete la cui media si avvicina assai ai valori calcolati. Il prisma l si presenta, in generale, con buone faccie, abbastanza lucenti e piane.

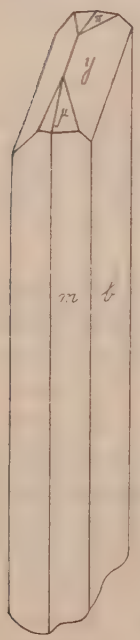


Fig. 1.

Frequenti sono i geminati, per lo più con penetrazione parziale, secondo la solita legge: asse di geminazione la normale ad (100).

Molto più interessanti sono invece i due cristalli nei quali si osservò la combinazione 2ª, con le due forme nuove π e μ. Uno di quei cristalli è rappresentato dall'attigua fig. 1.

Le facce di b e di m si presentano come nel caso precedente; tra le forme terminali domina $y\{131\}$ che possiede facce abbastanza piane e splendenti. La presenza di questa forma, che è rarissima nel gesso, e che in questi cristalli così dominante, presenta un notevole interesse.

Per quanto mi consta, essa venne rinvenuta, fino ad ora, altre tre volte soltanto; scoperta da Neumann nel 1833 [1] in un cristallo di gesso di Bex dove si presentava con facce incurvate e poco lucenti, venne rinvenuta una seconda volta da Schrauf [2] in cristalli di gesso dell'Harz, anche qui con facce non molto belle; e ultimamente venne notata da Šimek [3] sopra alcuni cristalli non molto belli di questo minerale, che si trovavano sopra dell'antimonite nel giacimento di Kostajnick in Serbia.

Che si tratti effettivamente di una forma $\{hkl\}$, fu stabilito determinando con certezza, mediante la posizione della direzione di estinzione su

(1) Pogg. Ann., (1833) XXVII, 240.

(2) Ber. Ak. Wien., *63* (1), 157 (1871).

(3) Šimek, Groth's Zeit. f. Kryst., (1912) L, 640.

$\{010\}$ che le facce riconosciute appartenenti a $\{131\}$ giacciono effettivamente nell'angolo ottuso β.

Le due forme nuove $\{553\}$ e $\{113\}$ si presentano con facce poco estese, non molto splendenti e leggermente curve; le misure eseguite sono però attendibilissime, ed i valori trovati concordano abbastanza bene con quelli calcolati in base alle costanti di Des Cloizeaux, generalmente accettate, come risulta dalla seguente tabella:

	Trovato	Calcolato
(010):(113)	82°43′	82°38′
(110):(113)	69°1′	69°17′ ½
(010):(553)	65°49′	65°59′34″
(110):(553)	36°20′	36°30°50″

Fu verificata l'esistenza della zona π, μ, m.

È interessante di osservare che con la forma $\{553\}$, da me trovata, si identifica un altro prisma $\{h\,h\,l\}$, descritto molti anni fa da Schrauf, il quale credette di attribuire ad esso il simbolo $\{995\}$.

Schrauf, infatti [1], nel 1871 studiando alcuni grossi geminati di gesso dell'Harz, rinvenne tre forme nuove; tra queste un prisma $\mu\,\{995\}$ determinato in base alla misura dell'angolo

$$(995):(9\bar{9}5).$$

Ora, quella misura ha un valore limitato, perchè, come le altre riferite in quel lavoro, venne eseguita esclusivamente col goniometro d'applicazione; ad ogni modo, il valore trovato da Schrauf si accorda meglio con quello calcolato per il simbolo $\{553\}$ che non con quello che si deduce per $\{995\}$.

Si ha infatti:

$$(h\,h\,l):(h\,\bar{h}\,l) = 48°\,{}^1/_2 \text{ misurato}$$
$$(553):(5\bar{5}3) = 48°1′ \text{ calcolato}$$
$$(995):(9\bar{9}5) = 49°12′ \quad »$$

Il simbolo $\{553\}$ merita poi d'essere preferito, per la sua maggiore semplicità; la forma $\{995\}$ è quindi sicuramente identica con la $\{553\}$ da me rinvenuta, e per questo io adottai per quest'ultima la lettera μ.

È poi ancora da notarsi che la μ, tanto nei due cristalli nei quali io la rinvenni, quanto in quelli esaminati da Schrauf, compare sempre insieme con la y.

L'aver stabilito che alla forma μ di Schrauf spetta, in realtà, il simbolo $\{553\}$ conduce necessariamente a cambiare il simbolo dell'altra forma ζ scoperta da Schrauf insieme con μ. Questa forma giace in zona con μ e con y:

[1] Ber. Ak. Wien, loc. cit.

Schrauf assegnò ad essa il simbolo {733}, in base a questo fatto ed alla misura approssimativa

$$(hkl) : (hk\bar{l}) = 25° \text{ circa.}$$

Se μ ha il simbolo {553}, ne segue che ζ, che si trova nella zona [553 : 131], deve avere un simbolo che soddisfi alla condizione:

$$2h + k - 5l = 0;$$

questa non può naturalmente essere soddisfatta da {733}, ma, invece, dal simbolo molto più semplice {211}.

Per l'angolo (211) : (2$\bar{1}$1) si calcola, sempre con le costanti di Des Cloizeaux, 26°46′: l'accordo col valore trovato è poco soddisfacente, ma non va dimenticato che si tratta di un angolo misurato col goniometro di applicazione fra due facce che, se sono sufficientemente estese, sono però un po' curve. Date queste circostanze, non è il caso di calcolare per ζ un simbolo più complicato che soddisfi al legame di zona e dia un miglior accordo fra l'angolo misurato ed il calcolato.

Lo stesso Schrauf, del resto, rifiutò di accettare il simbolo {211}, solo perchè, avendo egli erroneamente alla μ attribuito il simbolo {995}, veniva, per la condizione di tautozonalità con μ e con y, escluso per la ζ il simbolo {211}.

Nella tabella seguente sono contenuti i valori angolari misurati, posti a confronto con i valori teorici calcolati in base alle costanti di Des Cloizeaux (1).

$$a : b : c = 0{,}68994 : 1 : 0{,}41241 \quad \beta = 80°42'10''$$

	Limiti delle misure	Num. delle osserv.	Media delle misure	Valori calcolati	Differenze esp. - calc.
(110) : (1$\bar{1}$0)	68°20′- 68°44′	8	68°31′	68°30′	1′
(110) : (010)	55 20 - 56 1	16	55 42	55 45	— 3
(010) : (131)	45 8 - 45 52	4	45 39	45 33 45″	5 1/4
(131) : (1$\bar{3}$1)	89 2 - 89 10	2	89 6	88 52 1/2	13 1/2
(110) : (1$\bar{3}$1)	39 20 - 39 56	4	39 47	41 4	— 17
(010) : (553)	65 33 - 65 56	4	65 49	65 53 34	— 10 1/2
(553) : (5$\bar{5}$3)	48 10 - 48 13	2	48 11	48 1	10
(110) : (553)	36 14 - 36 26	2	36 20	36 30 50	— 10 5/6
(010) : (113)	82 9 - 83 9	4	82 43	82 38	5
(113) : (1$\bar{1}$3)	14 25 - 14 41	2	14 36	14 44	8
(110) : (113)	68 54 - 69 4	2	69 1	69 17 1/2	16 1/2
(010) : (111)	71 22 - 71 44	2	71 38	71 54	16

(1) Bull. Soc. min., (1886) *9*, 175

Finora, di determinazioni cristallografiche su cristalli *macroscopici* di gesso ne sono state eseguite ben poche.

La lenta azione del solfato ferroso sul calcare, che riproduce abbastanza bene alcuni processi naturali di formazione del gesso, pare un metodo assai adatto per ottenere cristalli con discreta ricchezza di forme.

I cristalli artificiali di gesso da me studiati presentano perciò, in confronto di quelli esaminati da altri autori, una ricchezza di facce relativamente notevole: così Lacroix [1] in cristalli di gesso ottenuti per lento svaporamento di una soluzione diluita di acido solforico che aveva reagito con fluoruro di calcio, potè osservare solamente le forme $\{010\}$, $\{110\}$, $\{111\}$ e geminati secondo (100); e Gorgeu [2], in cristalli ottenuti da una soluzione di solfito di calcio in acqua contenente acido solforoso, osservò appena $\{010\}$ $\{110\}$ ed i soliti geminati.

Più recentemente Barker [3], in cristalli di gesso, ottenuti per lento svaporamento di una soluzione cloridrica di solfato di calcio, riuscì ad identificare la forma $n\{\bar{1}11\}$ insieme con le $\{010\}$ e $\{110\}$.

Ultimamente poi Fletcher [4] rinvenne cristalli di gesso, depositatisi in una caldaia che serviva per la distillazione dell'acqua, anche più interessanti. Infatti egli vi rinvenne $\{010\}$ $\{110\}$ $\{230\}$ $\{111\}$, e, ciò che è più rimarchevole, notò geminati secondo $d\{101\}$, che fino ad ora, a quanto pare, non erano mai stati rinvenuti in cristalli di gesso artificiale.

Mi è grato infine di rivolgere al prof. F. Zambonini i miei più vivi ringraziamenti per l'ospitalità concessami nel suo laboratorio e per i consigli ed insegnamenti, di cui mi è prodigo nelle mie ricerche.

Biologia vegetale. — *Sulla biologia fiorale del mandorlo.* Nota preventiva di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. M.

(1) Bull. Soc. min., (1883) *6*, 173.
(2) Bull. Soc. min., (1894) *17*, 8.
(3) Mineralogical Magazine, (1907) XIV, 211.
(4) Mineralogical Magazine, (1911) XVI, 137.